

# **SIMULATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE LINEAIRE DES RESSORTS HELICOIDAUX**

Sami Ayadi and Ezzeddine Hadj-Taïeb  
Department of Mechanical, Engineering National University,  
B. P. W, 3038 Sfax, Tunisie.  
Contact: Ezed.Hadj@enis.rnu.tn

Received April 2005, Accepted March 2006  
No. 05-CSME-16, E.I.C. Accession 2868

---

## **RESUME**

Une modélisation numérique permettant d'étudier le comportement dynamique linéaire d'un ressort hélicoïdal sous chargement est présentée. La formulation mathématique est constituée d'un système linéaire de deux équations aux dérivées partielles de type hyperbolique qui sont les équations de quantité de mouvement du ressort. Dans ces conditions, la résolution numérique est effectuée par la méthode des caractéristiques et la méthode des différences finies conservatives de Lax-Wendroff. Les résultats obtenus, à l'aide de ces deux méthodes, ont permis d'analyser la propagation des ondes de déformations axiales et angulaires en différentes sections du ressort, dues à un chargement axial. Le chargement est représenté par la vitesse axiale temporelle de l'extrémité du ressort soumise au chargement. Pour valider la fiabilité du modèle présenté, les résultats issus de ces deux méthodes ont été confrontés à la solution analytique du problème étudié.

---

## **NUMERIC SIMULATION OF THE LINEAR DYNAMIC BEHAVIOUR OF THE HELICAL SPRINGS**

### **ABSTRACT**

Consideration is given, in this paper, to the numerical solution of the linear dynamic behaviour of a helical spring under loading. The mathematical formulation is constituted of two coupled, linear, hyperbolic, partial differential equations. The problem has been solved by the method of linear characteristics and the finite difference conservative scheme of Lax-Wendroff. The obtained results, with the use of these two methods, permitted to analyze the wave's propagation of the axial and angular deformations in different sections of the spring, due to an axial loading. The loading is represented by the time dependent axial velocity at the impacted end. To validate the reliability of the presented model, the computed results of the two numerical techniques are compared with the analytic solution of the studied problem.

## 1. INTRODUCTION

Les ressorts sont utilisés dans beaucoup d'applications pour résister aux chocs des charges. Love [1] a développé les équations permettant d'étudier la réponse statique des ressorts hélicoïdaux soumis à de grandes déformations.

Cook et al [2] ont utilisé le théorème de Castigliano pour calculer les déformations. Le ressort hélicoïdal, à section circulaire, est chargé par une force uniaxiale ou par un moment de torsion. La déformation due au cisaillement transversal et l'allongement du fil sont considérés négligeables.

Dans son étude, Lindkvist [3] a développé un modèle représenté par une relation linéaire de la déformation pour un petit élément du ressort. Le déplacement de cet élément a été obtenu en appliquant le théorème de Castigliano. Les différentes fréquences propres ont été calculées et comparées pour différents angles de l'hélice.

Pour déterminer la rigidité du ressort, Forrester [4] a analysé statiquement et dynamiquement le ressort par deux méthodes ; la méthode des éléments finis et la méthode analytique. Il a appliqué ces deux méthodes pour calculer les déplacements et les rotations aux extrémités du ressort dus aux forces et aux moments extérieurs. L'extension radiale des ressorts hélicoïdaux due à un impact longitudinal a été étudiée théoriquement et expérimentalement par Stokes [5]. Ce dernier a constaté que son modèle ne s'applique qu'à un ressort de longueur relativement infinie.

Dans les travaux précités, la propagation des ondes de déformations et les réponses temporelles n'ont pas été suffisamment examinées.

Les études concernant la propagation des ondes de déformations élastiques dans les ressorts hélicoïdaux sont assez rares. Elles ont été développées par Phillips et Costello [6] et Costello [7] pour le cas linéaire, et Sinha et Costello [8] pour le cas non-linéaire. Dans le cas linéaire, les auteurs ont appliqué la transformation de Laplace pour déterminer la réponse dynamique des ressorts hélicoïdaux sous chargement axial. Les solutions analytiques sont présentées sous forme de courbes temporelles indiquant l'évolution des ondes de déformations axiale et angulaire et de l'expansion à l'extrémité du ressort soumise au chargement. Toutefois, ces solutions n'ont été calculées que pour des intervalles de temps réduits et les courbes n'ont été tracées qu'au niveau de l'extrémité sous chargement. Par ailleurs, l'interprétation physique de la propagation de ces ondes n'a été que très partiellement analysée.

En nous inspirant des travaux de Costello [7], on se propose d'étudier numériquement, le comportement dynamique linéaire d'un ressort hélicoïdal sous chargement axial et d'examiner l'évolution des déformations en différentes sections du ressort. La résolution numérique est menée par deux méthodes ; la méthode des caractéristiques avec interpolation et la méthode des différences finies conservatives de Lax-Wendroff. Les résultats numériques obtenus, à l'aide de ces deux méthodes, sont confrontés à la solution analytique développée par ces auteurs.

## 2. FORMULATION MATHÉMATIQUE

L'application de l'équation de la quantité de mouvement à un élément du ressort, soumis à une force axiale  $F$  et un couple axial  $T$  (figure 1.a), permet d'obtenir les équations du comportement dynamique du ressort :

Résultante axiale suivant  $x$  :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

Moment axial suivant  $x$  :

$$b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

où  $u$  est le déplacement axial,  $v = r\theta$  est le déplacement angulaire,  $\theta$  est l'angle de rotation autour de l'axe  $x$ ,  $r$  est le rayon du ressort,  $x$  est la coordonnée axiale et  $t$  est le temps.

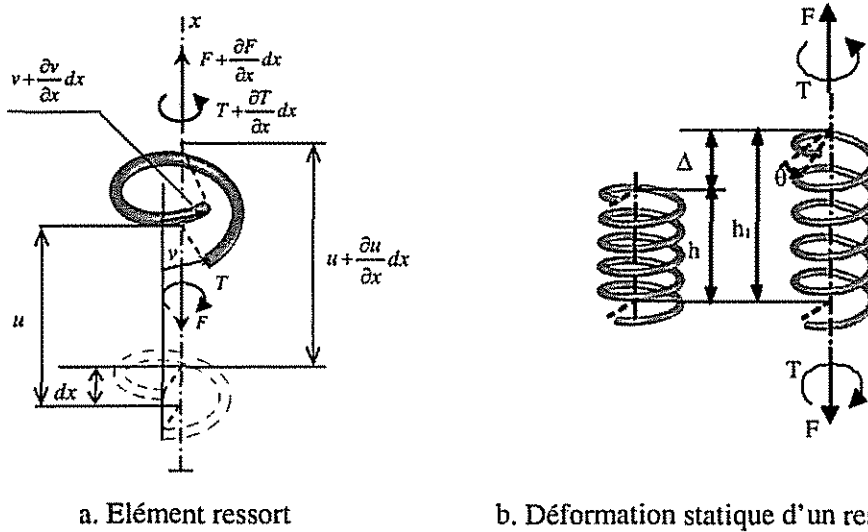


Figure 1. Description du ressort hélicoïdal

En petites déformations ( $|\epsilon| \ll 1$ ,  $|\beta| \ll 1$ ), les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $e$  sont constants et sont définis (par Sinha et Costello [8]) :

$$a = \frac{r^2}{EI} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} = \left(1 - \frac{\nu}{1+\nu} \cos^2 \alpha\right) \sin \alpha \quad (3)$$

$$b = \frac{r^2}{EI} \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{r}{EI} \frac{\partial T}{\partial \epsilon} = -\frac{\nu}{1+\nu} \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (4)$$

$$c = \frac{r}{EI} \frac{\partial T}{\partial \beta} = \left(1 - \frac{\nu}{1+\nu} \sin^2 \alpha\right) \sin \alpha \quad (5)$$

$$e = \frac{Mr^2}{Elh} \quad (6)$$

où  $h$  est la longueur du ressort,  $E$  est le module d'Young,  $\nu$  est le coefficient de Poisson,  $\epsilon = \partial u / \partial x = u_x$  est la déformation axiale,  $\beta = \partial v / \partial x = r \partial \theta / \partial x = v_x$  est la déformation angulaire,  $M$  est la masse du ressort,  $\alpha$  est l'angle de l'hélice,  $r$  est le rayon des spires et  $I$  est le moment quadratique. Dans ces conditions, les équations (1) et (2), décrivent le comportement dynamique linéaire du ressort.

### 3. METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION

La solution numérique du problème aux dérivées partielles de type hyperbolique régi par les équations (1) et (2), est obtenue par deux méthodes numériques : la méthode des caractéristiques et la méthode de Lax-Wendroff. La méthode des caractéristiques a été développée avec beaucoup de détail par Abott [9] et a été utilisée par de nombreux auteurs pour résoudre divers problèmes de propagation d'ondes (Hadj-Taïeb et Lili [10]). Cette méthode, basée sur les célérités de propagation des ondes, est appliquée pour obtenir des équations différentielles ordinaires dont l'intégration se fait, généralement, par des algorithmes numériques.

La méthode des différences finies de Lax Wendroff, appliquée pour résoudre les équations aux dérivées partielles hyperboliques, est classique et a été publiée par Lax-Wendroff [11].

#### 3.1. Méthode des Caractéristiques

Le développement des équations caractéristiques est basé sur une analyse aux valeurs propres des équations (1) et (2). D'après cette analyse, un ensemble de quatre racines caractéristiques distinctes sont obtenues. Elles correspondent aux quatre pentes des lignes caractéristiques le long desquelles les petites perturbations se propagent dans le ressort. En notant :

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, u_{xt} = \frac{\partial u_x}{\partial t}, v_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, v_{xt} = \frac{\partial v_x}{\partial t}, u_{tt} = \frac{\partial u_t}{\partial t}, v_{tt} = \frac{\partial v_t}{\partial t}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} du_x &= u_{xx}dx + u_{xt}dt \text{ et } du_t = u_{tx}dx + u_{tt}dt \\ dv_x &= v_{xx}dx + v_{xt}dt \text{ et } dv_t = v_{tx}dx + v_{tt}dt \end{aligned} \quad (7)$$

Sachant que

$$u_{xt} = u_{tx} \text{ et } v_{xt} = v_{tx} \quad (8)$$

la théorie des caractéristiques permet de transformer le système des équations (1) et (2) en un système d'équations différentielles ordinaires qui seront intégrées numériquement suivant les lignes caractéristiques.

Les directions de ces lignes sont obtenues en annulant le déterminant de la matrice carrée (8x8) formée par les coefficients des équations (1), (2), (7) et (8). On obtient les quatre racines réelles suivantes (Sinha et Costello [8]):

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{1,2} = \sqrt{e \frac{(a+c) \mp \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2(ac-b^2)}} \quad (9)$$

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{3,4} = -\sqrt{e \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2(ac-b^2)}} \quad (10)$$

On peut vérifier que :

$$c_f = \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \frac{\sqrt{2(ac-b^2)}}{\sqrt{e\left[(a+c)-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}\right]}} = \sqrt{\frac{EIH}{Mr^2}} \sin\alpha = \sqrt{\frac{\sin\alpha}{e}} \quad (11)$$

est la célérité rapide des ondes de déformations angulaires et que :

$$c_s = \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \frac{\sqrt{2(ac-b^2)}}{\sqrt{e\left[(a+c)+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}\right]}} = \sqrt{\frac{\sin\alpha}{e(1+\nu)}} \quad (12)$$

est la célérité lente des ondes de déformations axiales.

Les équations de compatibilité, valables le long des lignes caractéristiques, peuvent être déterminées en remplaçant l'une des colonnes de la matrice précédente par le vecteur de composantes  $(0, 0, 0, 0, du_x, dv_x, du_t, dv_t)$  et en annulant le déterminant de la matrice obtenue. On trouve :

$$\left\{1-c\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\right\} du_x + \left\{b\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\right\} dv_x - \left\{1-c\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\right\} \left(\frac{dt}{dx}\right) du_t - \left\{b\left(\frac{dt}{dx}\right)^3\right\} dv_t = 0 \quad (13)$$

où  $dt/dx$  est égal à l'une des quatre racines définies par les relations (9) et (10).

L'équation (13) peut s'écrire sous forme de différences finies :

$$\left\{1-c\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\right\} \Delta u_x + \left\{b\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\right\} \Delta v_x - \left\{1-c\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\right\} \left(\frac{dt}{dx}\right) \Delta u_t - \left\{b\left(\frac{dt}{dx}\right)^3\right\} \Delta v_t = 0 \quad (14)$$

Comme le montre la figure 2, les valeurs inconnues  $u_x, v_x, u_t$  et  $v_t$ , en tout point  $L$  du ressort, peuvent être obtenues à partir de leurs valeurs aux points  $P, Q, R$  et  $S$  se trouvant sur les quatre lignes caractéristiques passant par  $L$ . Les célérités  $c_f$  et  $c_s$  étant constantes, les morceaux de courbes  $PL, QL, RL$  et  $SL$  sont droits et l'équation (14) conduit, pour le point  $P$ , à :

$$\begin{aligned} & [(u_x)_L - (u_x)_P] \left[1-c\left(\frac{dt}{dx}\right)_{1,P}^2\right] + [(v_x)_L - (v_x)_P] b \left(\frac{dt}{dx}\right)_{1,P}^2 \\ & - [(u_t)_L - (u_t)_P] \left[1-c\left(\frac{dt}{dx}\right)_{1,P}^2\right] \left(\frac{dt}{dx}\right)_{1,P} - [(v_t)_L - (v_t)_P] b \left(\frac{dt}{dx}\right)_{1,P}^3 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Trois autres équations aux différences finies peuvent être associées aux points  $Q$ ,  $R$  et  $S$ . En résolvant le système des quatre équations, ainsi obtenues, on peut déterminer la solution  $u_x$ ,  $v_x$ ,  $u_t$  et  $v_t$  en tout point  $L$  du ressort.

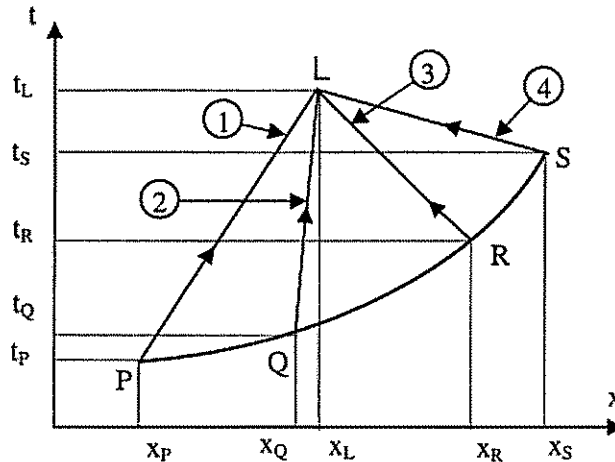


Figure 2. Lignes caractéristiques

### 3.2. Méthode de Lax-Wendroff

La méthode des différences finies de Lax-Wendroff est un schéma numérique à deux pas de prédiction et de correction et son application nécessite l'établissement d'une formulation conservative à partir des équations (1) et (2). Cette formulation s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = H(W) \quad (16)$$

où  $F$  et  $H$  sont deux fonctions vectorielles du vecteur inconnu  $W$ .

Le système des équations aux dérivées partielles (1), (2) et (8) étant à coefficients constants, il peut se mettre sous une telle forme avec :

$$W = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \\ v_t \\ v_x \end{pmatrix}, \quad F = - \begin{pmatrix} (a/e)u_x + (b/e)v_x \\ u_t \\ (b/e)u_x + (c/e)v_x \\ v_t \end{pmatrix} \quad \text{et } H = 0 \quad (17)$$

La méthode de Lax-Wendroff est du type "prédicteur-correcteur" pour laquelle le plan  $(x, t)$  est quadrillé par un réseau de droites orthogonales parallèles aux axes  $x$  et  $t$  (maillage régulier).

En imposant à la méthode de Lax-Wendroff de discrétiser le système linéaire conservatif (16) avec une précision d'ordre deux et en remplaçant les dérivées partielles par rapport au temps et à l'espace par des expressions aux différences finies, on obtient pour le premier pas ou phase de prédiction :

$$W_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_i^n) \quad (18)$$

et pour le deuxième pas ou phase de correction :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (19)$$

où  $\Delta x = h/N$  est le pas d'espace,  $N$  est le nombre de section et  $\Delta t$  est le pas de temps conditionné par le critère de stabilité de Courant Friedrich Lévy :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\max_k |\lambda_k|} \quad (20)$$

Les  $\lambda_k$  sont les valeurs propres de la matrice  $B$  qui est telle que  $\partial F/\partial x = B\partial W/\partial x$ . Dans ces conditions, on aura :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a/e & 0 & b/e \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b/e & 0 & c/e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \det(B - \lambda I) = \lambda^4 - \left(\frac{a+c}{e}\right)\lambda^2 + \frac{ac-b^2}{e^2} = 0$$

En posant  $\mu = 1/\lambda$ , on trouve :

$$\frac{ac-b^2}{e^2}\mu^4 - \left(\frac{a+c}{e}\right)\mu^2 + 1 = 0 \quad (21)$$

qui admet les quatre racines  $\{-c_f, -c_s, c_s, c_f\}$  définies par les relations (11) et (12).

Pour assurer la stabilité et éliminer les petites oscillations dans la solution, des études ont montré (Lerat et Peyret [12]) qu'il faut utiliser la limite du critère (20).

La condition de stabilité s'écrit donc :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{c_f} \quad (22)$$

#### 4. APPLICATIONS ET RESULTATS

Dans ce qui suit, un certain nombre de résultats numériques relatifs au comportement dynamique linéaire des ressorts hélicoïdaux est présenté. Les calculs, menés à l'aide des deux méthodes précédentes, permettent d'obtenir, de manière rapide et économique, l'évolution des ondes de déformations en différentes sections du ressort. Nous avons choisi d'examiner deux exemples de ressort.

## 4.1. Application 1

### 4.1.1. Description du Système

Considérons un système ressort hélicoïdal dont les caractéristiques sont d'après Sinha et Costello [8] :

$h = 48.26 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 0.14184 \text{ rd}$ ,  $r = 17.932 \text{ cm}$ , nombre de spires  $n = 3$ ,  $\nu = 0.29$ , rayon du fil  $r_f = 1.509 \text{ cm}$ ,  $E = 20.685 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ ,  $\Delta = 16.51 \text{ cm}$ ,  $M = 19.146 \text{ Kg}$ .

On suppose que le ressort est initialement comprimé d'une distance  $\Delta$  (voir figure 1.b). Pour tout  $x \in [0, h]$ , les conditions initiales sont définies par :

$$u_x(x,0) = -\Delta/h \text{ et } v_x(x,0) = 0 \quad (23)$$

$$u_t(x,0) = 0 \text{ et } v_t(x,0) = 0 \quad (24)$$

Le ressort est soumis à un chargement produisant une vitesse de déplacement axial à l'extrémité  $x = 0$  représentée par la fonction  $\phi_1(t)$  portée sur la planche 1 et définie par les valeurs indiquées sur le tableau 1.

Tableau 1. Vitesse de l'extrémité du ressort  $x = 0$

Temps (ms)	0	3.375	27.75	50.625
Vitesse axiale (m/s)	0	9.062	1.165	-0.3

Les conditions aux limites sont exprimées par :

$$u_t(0,t) = \phi_1(t), v_t(0,t) = 0, u_t(h,t) = 0 \text{ et } v_t(h,t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (25)$$

### 4.1.2. Analyse des Résultats

Les résultats sont présentés sur les planches 1, 2, 3, 4 et le tableau 2. Les calculs ont été réalisés avec deux programmes, écrits en langage Fortran, l'un basé sur la méthode des caractéristiques (MDC) et l'autre basé sur la méthode de Lax Wendroff (MLW). Sur la planche 1, apparaît l'évolution, dans le temps, des déformations axiale et angulaire à l'extrémité  $x = 0$  suite au chargement imposé à cette extrémité. Les résultats issus de la MDC et de la MLW montrent une bonne concordance avec la solution analytique de Sinha et Costello [7, 8] (voir annexe).



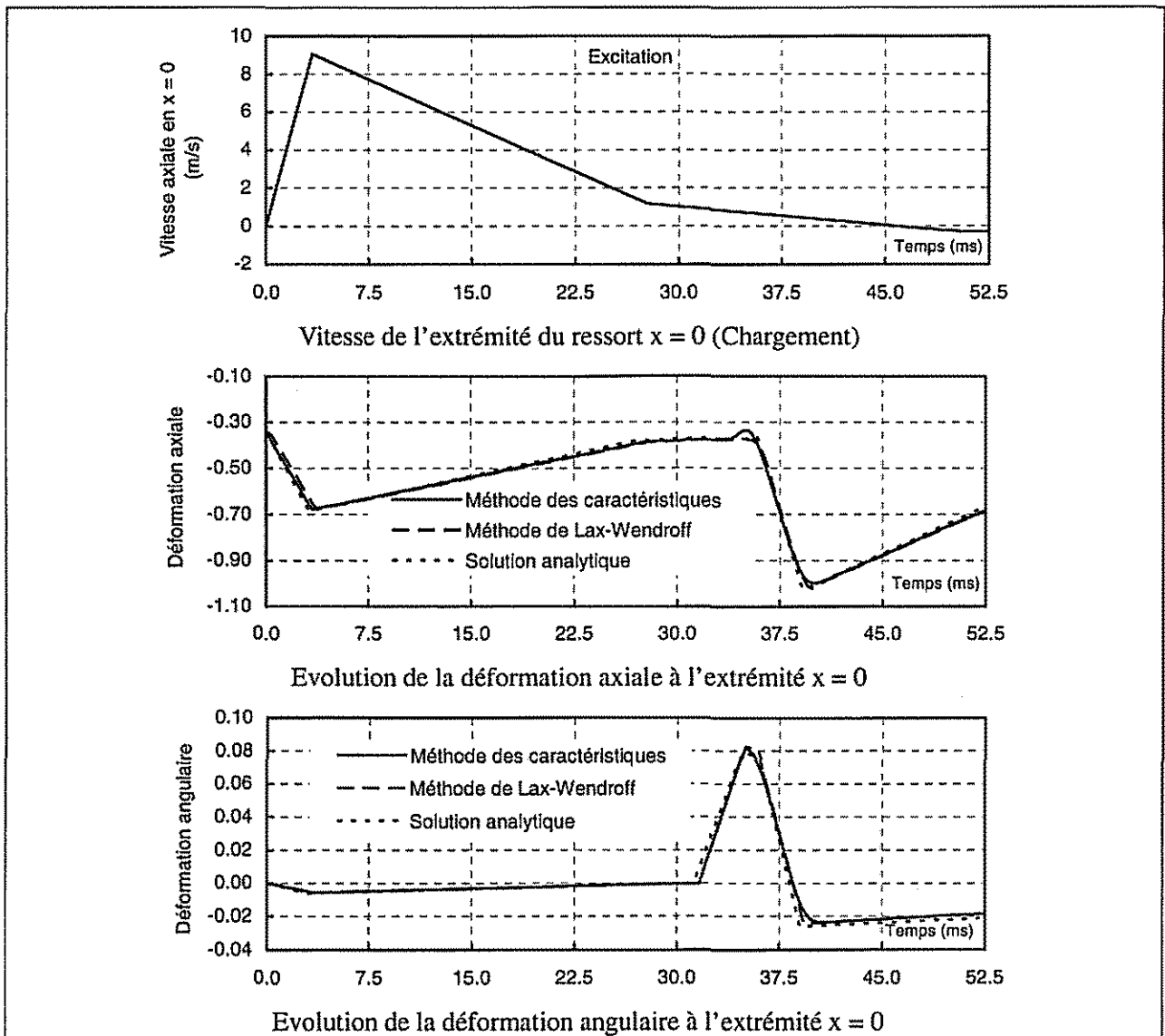


Planche 1. Comparaison des différentes méthodes de calcul

Les planches 2 et 3 présentent les courbes d'évolution des déformations axiale et angulaire, en fonction du temps, en différentes sections du ressort ( $x = 0$ ,  $x = h/4$ ,  $x = h/2$ ,  $x = 3h/4$  et  $x = h$ ). Les figures illustrent les résultats obtenus par la MDC avec un nombre de sections  $N = 180$  et par la MLW avec  $N = 1000$ . Elles montrent que ces deux méthodes conduisent à des résultats presque identiques. Toutefois, nous avons constaté que la MDC ne converge pas lorsque  $N$  devient supérieur à 180. Par contre, pour la MLW, le nombre de sections n'est pas limité et la précision est d'autant meilleure que ce nombre est assez élevé.

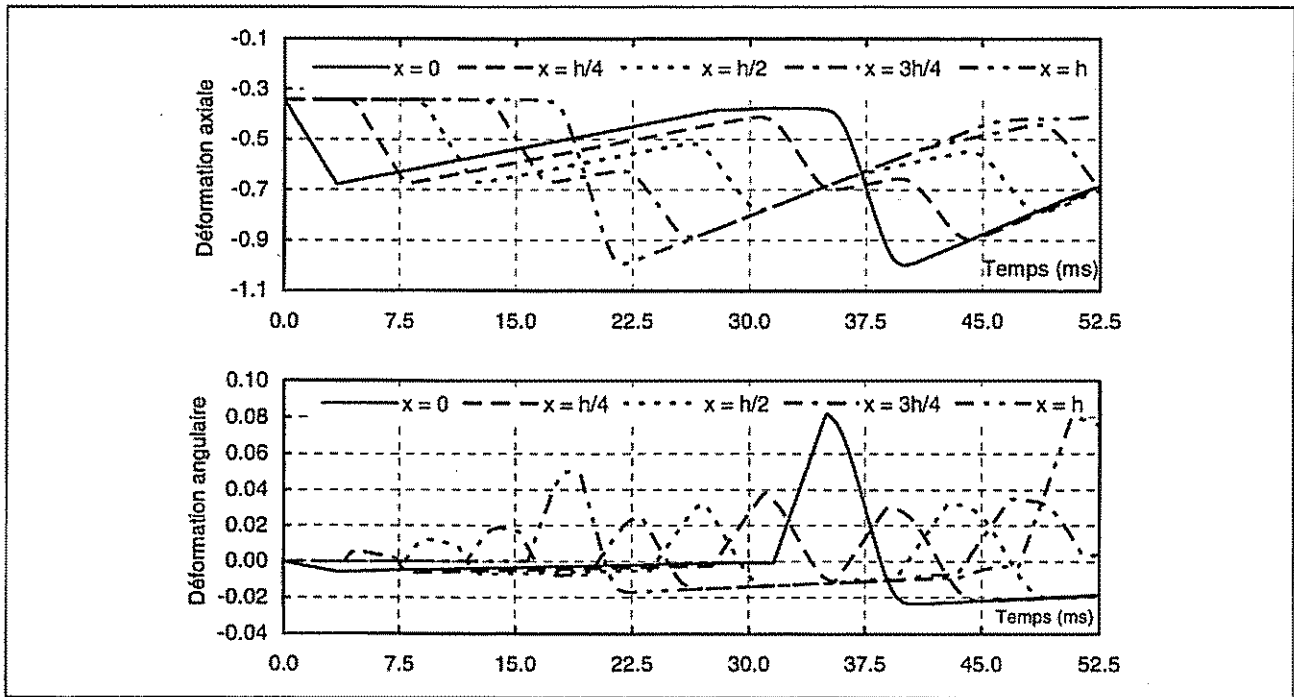


Planche 2. Courbes des déformations (Méthode des caractéristiques :  $N = 180$ )

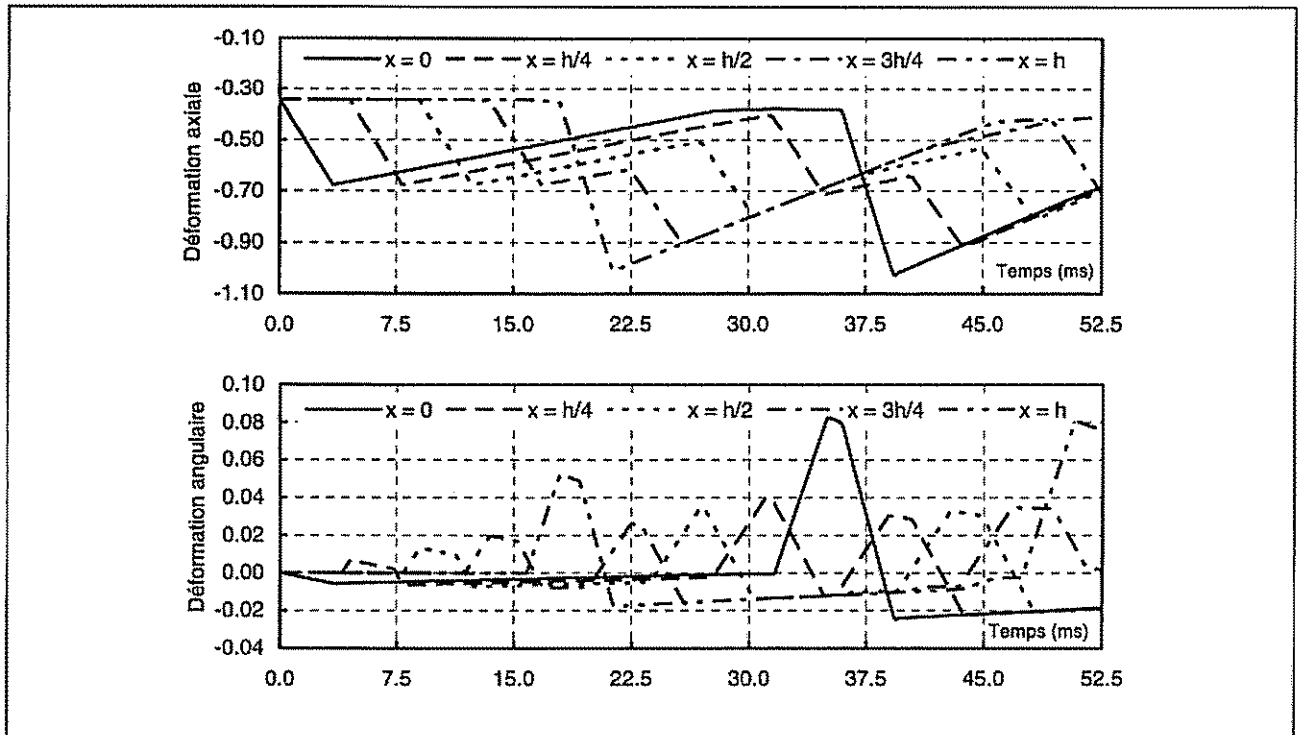


Planche 3. Courbes des déformations (Méthode de Lax-Wendroff :  $N = 1000$ )

Comme on peut le voir sur la planche 4, au temps  $t = 0$ , l'extrémité du ressort  $x = 0$  est excitée. Immédiatement, deux ondes de déformations l'une angulaire et l'autre axiale se propagent vers l'extrémité  $x = h$  ce qui prend un temps égal au rapport de  $h$  sur la célérité rapide  $c_f = 30.48 \text{ m/s}$  pour l'onde de déformation angulaire soit  $t = 15.83$  millisecondes et au rapport de  $h$  sur la célérité lente  $c_s = 26.898 \text{ m/s}$  pour l'onde de déformation axiale soit  $t = 17.94$  millisecondes. Lorsque ces deux ondes atteignent cette extrémité, elles se réfléchissent et se propagent vers l'extrémité  $x = 0$  du ressort. Comme les célérités sont constantes, cette étape prend la même durée que celle de la précédente.

Nous pouvons constater que l'onde de déformation angulaire provoquée en  $x = 0$ , atteint la section  $x = h/2$  à l'instant  $t = h/(2c_f) = 7.92 \text{ ms}$  (point  $A_1$ ).

Au temps  $t = h/(2c_s) = 8.94 \text{ ms}$ , l'onde de déformation axiale arrive à son tour à la section  $x = h/2$  (point  $B_1$ ). A son passage, elle perturbe l'onde de déformation angulaire (sous forme de diminution). Cette dernière se propage vers l'extrémité fixe du ressort  $x = h$  et l'atteint à l'instant  $t = h/c_f = 15.83 \text{ ms}$  (point  $A_2$ ). Là, elle augmente jusqu'à devenir égale à 0.0528 au temps  $t = h/c_s = 17.9 \text{ ms}$  correspondant à l'arrivée de l'onde de déformation axiale (point  $B_2$ ). La réflexion des ondes de déformations sur l'extrémité fixe du ressort  $x = h$ , donne naissance à des ondes plus amplifiées que les ondes incidentes. Notons que, les amplitudes de ces ondes dépendent de l'excitation et des caractéristiques géométriques et mécaniques du ressort. L'onde de déformation angulaire de retour arrive de nouveau à la section  $x = h/2$  à l'instant  $t = 23.75 \text{ ms}$  (point  $A_3$ ) et sera ensuite rejointe par la déformation axiale à l'instant  $t = 26.83 \text{ ms}$  (point  $B_3$ ). Ces deux ondes se réfléchissent à l'extrémité  $x = 0$  respectivement aux temps 31.67 ms (point  $A_4$ ) et 35.78 ms (point  $B_4$ ). Les ondes réfléchies passent de nouveau par la section  $h/2$  au temps  $t = 39.59 \text{ ms}$  (point  $A_5$ ) pour la déformation angulaire et au temps  $t = 44.72 \text{ ms}$  (point  $B_5$ ) pour la déformation axiale et ainsi de suite. Les réactions du système modélisé prouvent donc la validité des codes de calcul réalisés. Le tableau 2 donne la force axiale, le moment de torsion et l'expansion radiale du ressort, à l'extrémité  $x = 0$  et à l'instant  $t = 0.035 \text{ s}$ . On constate que les valeurs théoriques, fournies par la solution analytique, sont en bon accord avec les valeurs numériques issues de ces deux méthodes.

Tableau 2. Force axiale, moment de torsion et expansion radiale en  $x = 0$  et à  $t = 0.035 \text{ s}$

Méthode	Force axiale (N)	Moment de torsion (mN)	Expansion (mm)
Analytique	-11040	669.6	-0.998
MDC	-11100	540.5	-0.950
MLW	-10700	543.7	-0.973

## 4.2. Application 2

### 4.2.1 Description du Système

La deuxième application concerne un ressort hélicoïdal sous chargement dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données par Costello [7] :

$h = 119.38 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 0.198281 \text{ rd}$ ,  $r = 15.76 \text{ cm}$ , nombre de spires  $n = 6$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $r_f = 0.7 \text{ cm}$ ,

$E = 20.6810^6 \text{ N/cm}^2$ ,  $\Delta = 25.4 \text{ cm}$ ,  $M = 2.129 \text{ Kg}$ .

Notons que la valeur du rayon du fil,  $r_f = 0.13083 \text{ cm}$ , utilisée par Costello [7], est très faible et ne permet pas d'obtenir des résultats numériques conformes à la solution analytique développée par l'auteur. Pour cela, on a utilisé  $r_f = 0.7 \text{ cm}$ .

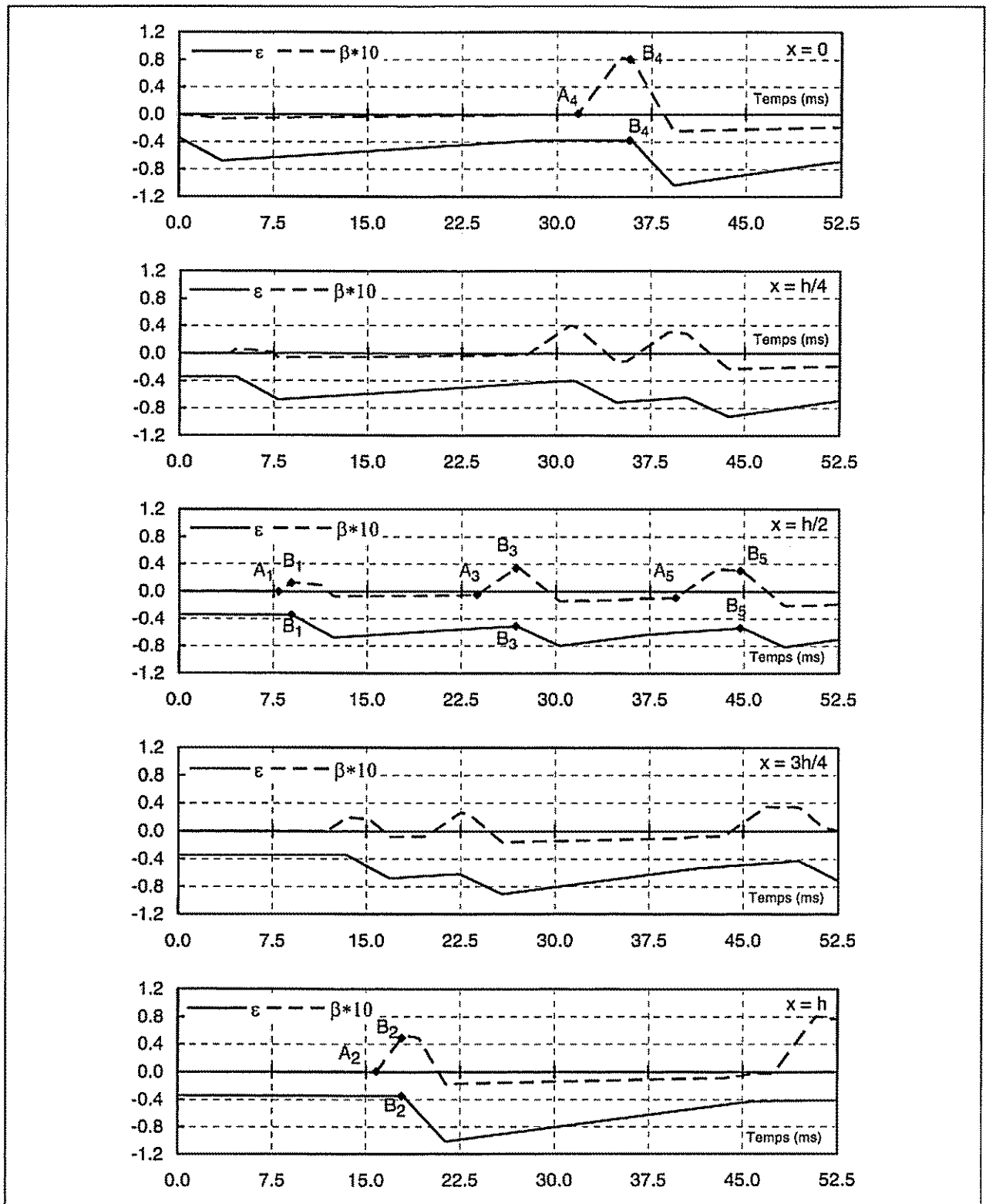


Planche 4. Propagation des ondes de déformations dans le ressort (Lax-Wendroff)

Le ressort est initialement comprimé d'une distance  $\Delta$  (voir figure 1.b). Pour tout  $x \in [0, h]$ , les conditions initiales sont donc celles définies par les expressions (23) et (24). Le comportement dynamique étudié est dû à un chargement à l'extrémité  $x = 0$  du ressort dont le déplacement axial a été mesuré expérimentalement. La dérivée par rapport au temps de la courbe de déplacement a permis de tracer la vitesse de cette extrémité  $f'(t)$  comme l'indique la planche 5. Les conditions aux limites sont donc exprimées par :

$$u_t(0,t) = f'(t), \quad v_t(0,t) = 0, \quad u_t(h,t) = 0 \quad \text{et} \quad v_t(h,t) = 0 \quad (26)$$

#### **4.2.2 Analyse des Résultats**

L'évolution, dans le temps, des déformations axiales et angulaires ainsi que l'expansion radiale est représentée sur les planches 5, 6 et 7.

Comme l'indique la planche 5, les résultats obtenus à l'aide des deux méthodes MDC et MLW, concordent parfaitement avec la solution analytique développée par Costello [7].

On constate que la solution analytique a été calculée dans l'intervalle de temps  $[0, 0.08]$  seconde, alors que la vitesse de l'extrémité du ressort, représentant l'excitation, est donnée jusqu'au temps  $t = 0.1352$  seconde. Les ondes de déformations axiale et angulaire, provoquées par le chargement à l'extrémité  $x = 0$ , se propagent dans le ressort avec deux célérités différentes, respectivement  $c_s = 37.25 \text{ m/s}$  et  $c_f = 41.65 \text{ m/s}$ , jusqu'à atteindre l'extrémité du ressort  $x = h$ . Elles se réfléchissent et retournent vers l'extrémité  $x = 0$  et ainsi de suite. Les conclusions tirées à partir de la première application concernant la variation des amplitudes des fluctuations et de la célérité de propagation des ondes se trouvent donc confirmer (planches 6 et 7). Là encore, on constate que la réflexion des ondes de déformations sur les deux extrémités du ressort fait apparaître des ondes d'amplitudes plus élevées que celles des ondes incidentes et que leur évolution dépend de l'allure de la courbe d'excitation.

Pour cette application, l'auteur mentionne que l'expansion radiale, en  $x = 0$  et à l'instant  $t = 0.1352$  seconde, a pour valeur  $0.00573 \text{ m}$ . Le calcul numérique par la MDC et la MLW conduit aux valeurs  $0.005436 \text{ m}$  et  $0.0056 \text{ m}$  respectivement, qui sont assez proches de la valeur théorique.

Toutefois, contrairement à la première application, les interprétations concernant la propagation des ondes peuvent être poursuivies pour des temps pouvant dépasser deux fois le temps d'allée et de retour des ondes ( $0.117 \text{ s}$  pour la déformation angulaire et  $0.1282 \text{ s}$  pour la déformation axiale).

### **5. CONCLUSION**

Dans cet article, les deux méthodes numériques des caractéristiques et de Lax-Wendroff ont été appliquées pour étudier le comportement dynamique linéaire d'un ressort hélicoïdal sous chargement axial. Les résultats numériques, des deux exemples étudiés et simulés, traduisent parfaitement les phénomènes physiques concernant la propagation des ondes de déformations et la réflexion de ces ondes sur les deux extrémités du ressort. Sur le plan numérique, on peut affirmer l'efficacité de la méthode des caractéristiques pour reproduire convenablement le comportement dynamique linéaire des ressorts hélicoïdaux. Cependant, cette méthode nécessite l'utilisation de l'interpolation linéaire ce qui a certainement une incidence négative sur la convergence et la précision du calcul. Par contre, l'étude montre la grande précision de la méthode de Lax Wendroff. Elle est pratiquement efficace quant à la précision et la simplicité et économique quant à son application. Physiquement, les résultats des exemples traités, par le modèle linéaire, dépassent le domaine des petites déformations. Dans ces conditions, une modélisation numérique plus générale reste à développer pour étudier le comportement dynamique non linéaire du ressort hélicoïdal.

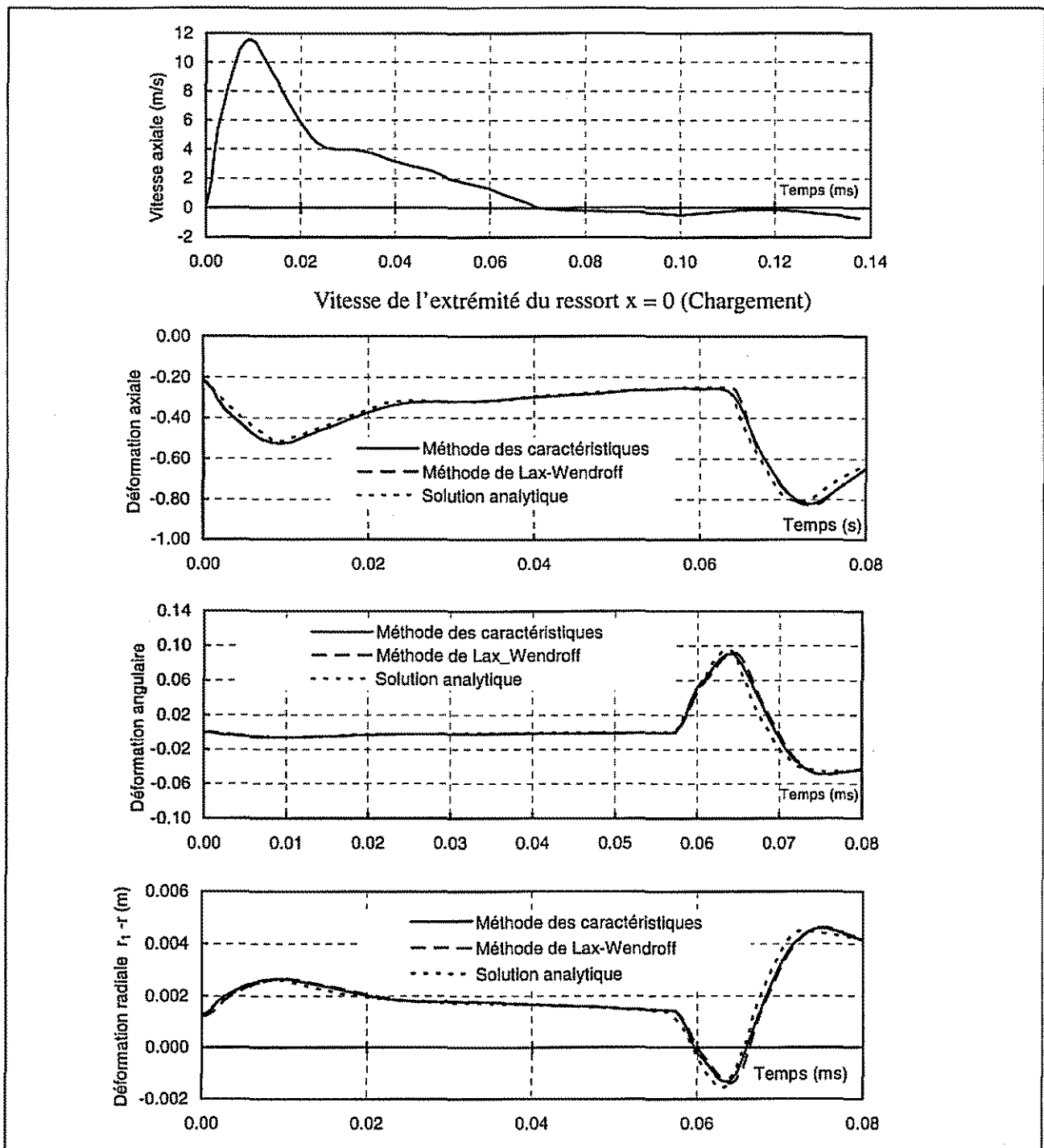


Planche 5. Comparaison des différentes méthodes de calcul

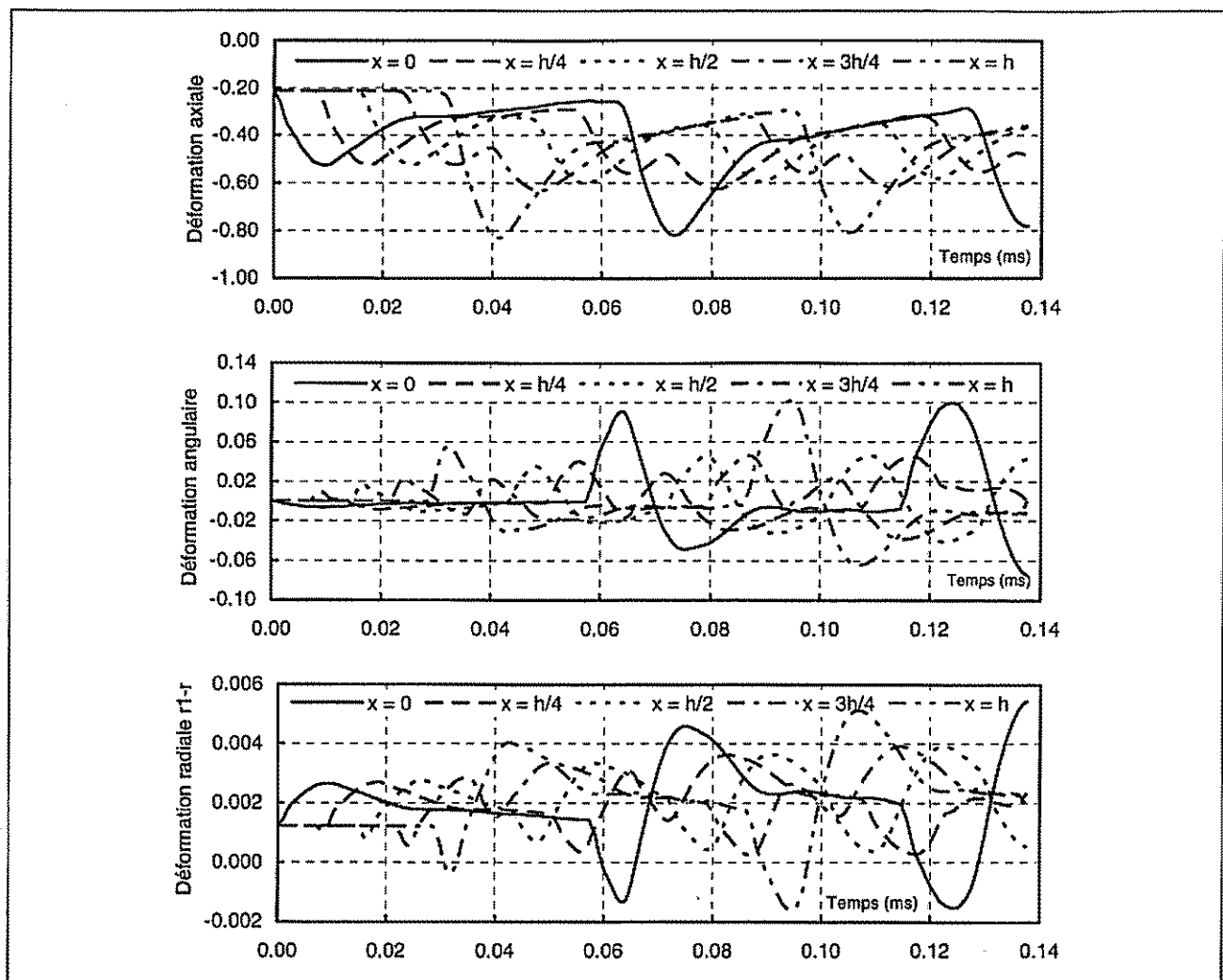


Planche 6. Courbes des déformations (Méthode des caractéristiques :  $N = 180$ )

## REFERENCES

- [1] Love, A. E. H., «A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity», 4th Editions Dover, 1927.
- [2] Cook R. D, Young W. C., «Advanced Mechanics of Materials», New York, Macmillan Publishing Company, 1985.
- [3] Lindkvist L., «Three-Dimensional Load-Deformation Relation Ships of Arbitrarily Loaded Coiled Springs», Sweden, Machine and Vehicle Design, Chalmers of Technology, 1995.
- [4] Forrester M. K., «Stiffness Model of a Die Spring», Thesis of Master Science doctorate, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, 2001.
- [5] Stokes V. K., «On the Dynamic Radial Expansion of Helical Springs Due to Longitudinal Impact», Journal of Sound Vibration, vol. 35, 1974, p. 77.
- [6] Phillips J. W., Costello G. A., «Large Deflections of Impacted Helical Springs», the Journal of the Acoustical Society of America, vol. 51, 1972, p. 967-972.

- [7] Costello G. A., «Radial expansion of impacted helical springs», Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, vol. 42, 1975, p. 789-792.
- [8] Sinha S. K., Costello G. A., «The Numerical Solution of the Dynamic Response of Helical springs», International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, 1978, p. 949-961.
- [9] Abott M. B., «An introduction to the method of the characteristics», American Elsevier New York, 1966.
- [10] Hadj-Taïeb E., Lili T., «The numerical solution of the transient two-phase flow in rigid pipelines», International Journal for Numerical Methods in fluids, vol. 29, 1999, p. 501-514
- [11] Lax P. D., Wendroff B., «Difference scheme for hyperbolic equations with high order of accuracy», Comm. Pure Appl, vol. 17, 1966, p. 381-398.
- [12] Lerat A., Peyret R., «Sur le choix des schémas aux différences du second ordre fournissant des profils», C.R.Acad, Sc Paris, Septembre 1973, t. 277, p. 363-366.

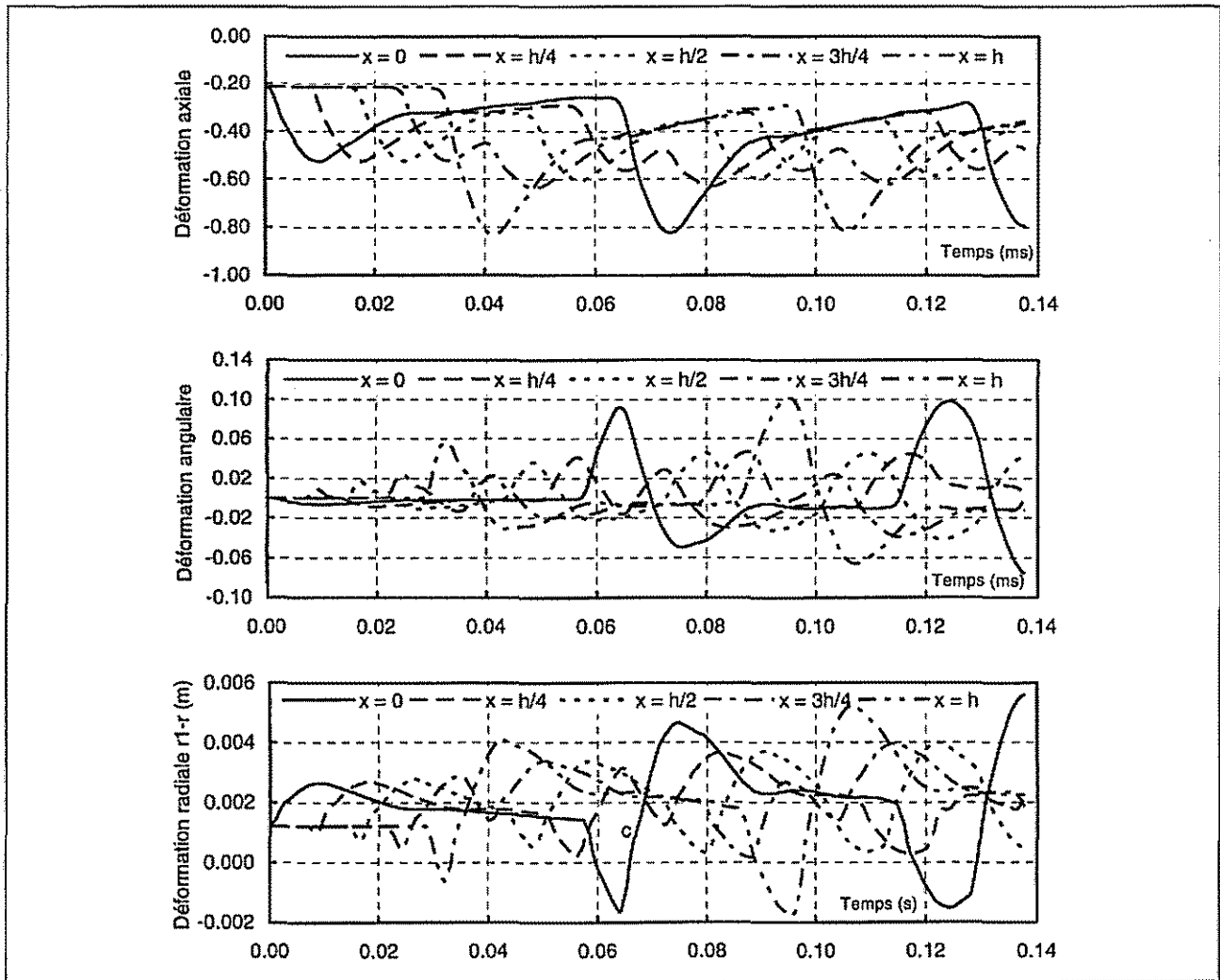


Planche 7. Courbes des déformations (Méthode de Lax-Wendroff :  $N = 1000$ )



## Annexe

### Solution Analytique du Comportement Linéaire du Ressort Hélicoïdal

La solution analytique des équations (1) et (2) s'obtient en appliquant la transformation de Laplace. Pour  $x = 0$ , elle s'écrit sous la forme (Costello [7]) :

$$\begin{aligned} \varepsilon(0,t) = & -\frac{g_2 e_1 k}{(g_2 - g_1)h} \sum_{n=1}^{\infty} \phi(t - 2ne_1 k) H[t - 2ne_1 k] \\ & -\frac{g_2 e_1 k}{(g_2 - g_1)h} \sum_{n=1}^{\infty} \phi[t - 2(n-1)e_1 k] H[t - 2(n-1)e_1 k] \\ & -\frac{g_1 e_2 k}{(g_1 - g_2)h} \sum_{n=1}^{\infty} \phi(t - 2ne_2 k) H[t - 2ne_2 k] \\ & -\frac{g_1 e_2 k}{(g_1 - g_2)h} \sum_{n=1}^{\infty} \phi[t - 2(n-1)e_2 k] \\ & H[t - 2(n-1)e_2 k] - \frac{\Delta}{h} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta(0,t) = & -\frac{g_1 g_2 e_1 k}{(g_2 - g_1)h} \sum_{n=1}^{\infty} \phi(t - 2ne_1 k) H[t - 2ne_1 k] \\ & -\frac{g_1 g_2 e_1 k}{(g_2 - g_1)h} \sum_{n=1}^{\infty} \phi(t - 2(n-1)e_1 k) H[t - 2(n-1)e_1 k] \\ & -\frac{g_1 g_2 e_2 k}{(g_1 - g_2)h} \sum_{n=1}^{\infty} \phi(t - 2ne_2 k) H[t - 2ne_2 k] \\ & -\frac{g_1 g_2 e_2 k}{(g_1 - g_2)h} \sum_{n=1}^{\infty} \phi(t - 2(n-1)e_2 k) H[t - 2(n-1)e_2 k] \end{aligned}$$

où :

$$\begin{array}{lll} k = h\sqrt{e} & \text{avec} & e = Mr^2/EIh \\ e_1 = 1/\sqrt{\sin\alpha} & \text{et} & e_2 = \sqrt{(1+\nu)/\sin\alpha} \\ g_1 = \frac{(e\sin\alpha - a)}{b} & \text{et} & g_2 = \left(\frac{e\sin\alpha}{1+\nu} - a\right) \frac{1}{b} \end{array}$$

## NOMENCLATURE

$F$	force axiale, N	$c_f$	célérité rapide, m/s
$T$	couple axial, mN	$c_s$	célérité lente, m/s
$u$	déplacement axial, m	$a, b, c, e$	coefficients constants
$v$	déplacement angulaire, m	$u_x, v_x, u_t, v_t$	variables dépendantes
$\theta$	angle de rotation autour de l'axe $x$	$P, Q, R, S, L$	point de calcul d'interpolation
$r$	rayon du ressort, m	$F$ et $H$	fonctions vectorielles
$x$	coordonnée axiale, m	$W$	vecteur inconnu
$t$	temps, s	$\Delta x$	pas d'espace
$h$	longueur du ressort, m	$N$	nombre de section
$E$	module d'Young, N/cm <sup>2</sup>	$\Delta t$	pas de temps, s
$\nu$	coefficient de Poisson	$\lambda_k$	valeurs propres
$\varepsilon$	déformation axiale	$B$	matrice carrée (8x8)
$\beta$	déformation angulaire, rad	$\phi_1, f'$	fonctions d'excitations
$M$	masse du ressort, Kg	$n$	nombre de spires
$\alpha$	angle de l'hélice, rad	$r_f$	rayon du fil, m
$r$	rayon des spires, m	$\Delta$	raccourcissement, m
$I$	moment quadratique, m <sup>4</sup>		