

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF AN ALGORITHM OF ATTITUDE FOR A STRAP-DOWN INERTIAL SYSTEM

Lucian Teodor Grigorie
Department of Avionics, 105 Decebal Blvd.
Faculty of Electrical Engineering, University of Craiova, Craiova, Dolj 200440, Romania
Contact: lgrigore@elth.ucv.ro

Adrian Hiliuta and Ruxandra Mihaela Botez
Department of Automated Manufacturing Engineering, 1100 Notre Dame West
Ecole de technologie supérieure, Montréal, Québec, Canada, H3C 1K3
Contact: ahiliuta@ele.etsmtl.ca, ruxandra.Botez@etsmtl.ca

Ioan Aron
Faculty of Aerospace Engineering, 1 Gh. Polizu Street
University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania, 060032
Contact: iaron@aero.pub.ro

Received February 2006, Accepted August 2006
No. 06-CSME-13, E.I.C. Accession 2932

ABSTRACT

Two numerical algorithms are presented here: the integration of the Poisson equation of attitude and the calculation of the angles from the elements of the matrix of attitude. The method here suggested lies in the use of a fast algorithm of Wilcox type in which the errors of commutation are eliminated by the use of a numerical artifice implemented in a data acquisition card: information on the angular velocity is given on only one channel among the three channels of the chart (the two other channels are put at zero) during a step of calculation.

The numerical simulations are performed and validated by use of the Wilcox integration method which implies errors of commutation, with various orders of truncation, and by the integration method with an algorithm with two rates of calculation. By use of a strap-down inertial system and the Matlab software, real time experimental tests are carried out to calculate the best alternatives of the algorithm of integration resulted from the numerical simulations.

ÉTUDE NUMÉRIQUE ET EXPERIMENTALE D'UN ALGORITHME D'ATTITUDE POUR UN SYSTEME INERTIEL À COMPOSANTS LIÉS

RESUME

Dans cet article, deux algorithmes numériques sont premièrement présentés : L'intégration de l'équation Poisson d'attitude et Le calcul des angles à partir des éléments de la matrice d'attitude. La nouvelle méthode proposée réside dans l'utilisation d'un algorithme rapide de type Wilcox dans lequel les erreurs de commutation sont éliminées par l'utilisation d'un artifice numérique impliquant une carte d'acquisition de données: l'information sur la vitesse angulaire est donnée sur un seul canal parmi les trois canaux de la carte (les deux autres canaux sont mis à zéro) pendant un pas de calcul.

Les simulations numériques réalisées en appliquant la méthode d'intégration de Wilcox impliquent des erreurs de commutation qui ont des différents ordres de troncation. Dans la méthode proposée d'intégration, nous utilisons un algorithme avec deux cadences de calcul, dans le but de la validation de cette méthode. Des tests expérimentaux en temps réel sont réalisés sur un système inertiel à composantes liées pour obtenir les meilleures variantes de l'algorithme d'intégration résultées des simulations numériques.

1. INTRODUCTION

Dans le but de déterminer l'attitude de l'aéronef à l'aide d'un système inertiel de navigation il faut calculer des données de navigation exprimées en termes d'angles de roulis, de tangage et de lacet. Il existe principalement deux systèmes inertiels de navigation: 1. Systèmes avec plate-forme stabilisée et 2. Systèmes à composants liés.

Le système inertiel à composants liés présente l'avantage de la miniaturisation et d'organisation de la redondance du système de mesure ce qui le rend idéal d'être utilisé dans tous les types d'applications. Ce système utilise un processeur de navigation performant et des algorithmes optimaux de traitement des informations fournies par capteurs [1]. Le problème de la détermination de l'attitude à l'aide d'un système à composants liés est plus compliqué par rapport à la détermination de l'attitude à l'aide d'un système avec une plate-forme stabilisée, car des calculs mathématiques plus complexes et des algorithmes numériques sont nécessaires.

Deux méthodes de détermination de l'attitude sont implantées dans les systèmes inertiels à composants liés, dans le but de l'obtention de la matrice d'attitude et ces méthodes sont: 1. La méthode des quaternions d'attitude et 2. La méthode matricielle.

L'obtention de la matrice finale d'attitude présume l'intégration numérique de l'équation différentielle Poisson d'attitude dans l'une de ses deux formes: quaternionique ou matricielle [2]. Le système inertiel fournit des informations sur les angles d'attitude aux systèmes automatiques de guidage de vol. On peut déterminer les angles d'attitude à partir de la matrice d'attitude courante en utilisant un algorithme mathématique. Dans la plupart de publications de spécialité, des algorithmes tronqués sont présentés qui sont affectés par des erreurs trop grandes ou trop petites, et qui nécessitent parfois des itérations jusqu'à leurs convergences. Pour résoudre ces types de problèmes, on peut concevoir un algorithme basé sur plusieurs instructions de conditionnement qui reflètent les cadrans trigonométriques d'appartenance des angles d'attitude et la réalisation des fonctions trigonométriques inverses.

Dans la méthode ici proposée, deux algorithmes numériques sont conçus pour: 1. L'intégration de l'équation Poisson d'attitude et 2. La détermination des angles à partir des éléments de la matrice d'attitude. Plus spécifiquement, l'intégration numérique de l'équation Poisson d'attitude sera suivie par l'équivalence du quaternion d'attitude avec la matrice d'attitude. Dans cette méthode, un algorithme rapide de type Wilcox est utilisé, dans lequel les erreurs de commutation sont éliminées par l'utilisation d'un artifice numérique qui implique la carte d'acquisition des données.

Dans le but de maintenir la direction du vecteur de vitesse angulaire absolue (nécessaire pour satisfaire la condition de commutation), nous considérons pendant un pas de calcul, que seulement l'une de trois voies sur lesquelles nous réalisons l'acquisition des données gyrométriques a l'entrée non nulle. Pendant l'exécution de l'algorithme numérique, les trois voies d'entrée sont balayées de trois en trois pas de calcul. Les éléments de la matrice d'attitude sont traités plus loin par le deuxième algorithme numérique proposé qui concerne le calcul des angles d'attitude à partir de la matrice d'attitude.

La méthode ici proposée est validée par des simulations numériques en utilisant: 1. La méthode d'intégration de Wilcox impliquant des erreurs de commutation, pour des différents ordres de troncation, et 2. La méthode d'intégration avec un algorithme impliquant deux cadences de calcul. Nous simulons le comportement d'un système inertiel à composants liés en utilisant le logiciel Matlab. Des essais expérimentaux sont réalisés en temps réel pour valider les meilleures variantes des algorithmes d'intégration résultats des simulations numériques.

2. L'ALGORITHME DE DETERMINATION D'ATTITUDE

Pour la détermination de l'attitude de vol d'aéronefs, nous utilisons le quaternion d'attitude Q et la matrice des cosines directeurs qui réalise le passage entre le trièdre véhicule et le trièdre horizontal local

R'_v . L'intégration de l'équation Poisson est réalisée d'une manière quaternionique car la procédure d'orthonormalisation est très simple : les angles d'attitude (roulis ϕ_x , tangage ϕ_y , et lacet ϕ_z) sont déterminés à partir de la matrice des cosines directeurs qui est équivalente avec le quaternion d'attitude. Les grandeurs connues à chaque moment de temps sont les composantes $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ de la vitesse angulaire mesurée par les gyromètres du système inertiel à composants liés. L'équation quaternionique à intégrer est ([1], [2], [3]):

$$\dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

2.1. La Simulation Numérique De L'Algorithme Qui Utilise La Méthode De Wilcox

Les éléments du quaternion d'attitude Q au temps t_{n+1} sont calculés en utilisant l'algorithme d'intégration proposé par Wilcox, alors Q s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix}_{t_{n+1}} = \begin{bmatrix} C_m & S_m \Delta \phi_z(t_n) & -S_m \Delta \phi_y(t_n) & S_m \Delta \phi_x(t_n) \\ -S_m \Delta \phi_z(t_n) & C_m & S_m \Delta \phi_x(t_n) & S_m \Delta \phi_y(t_n) \\ S_m \Delta \phi_y(t_n) & -S_m \Delta \phi_x(t_n) & C_m & S_m \Delta \phi_z(t_n) \\ -S_m \Delta \phi_x(t_n) & -S_m \Delta \phi_y(t_n) & -S_m \Delta \phi_z(t_n) & C_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix}_{t_n} \quad (2)$$

où C_m et S_m sont des coefficients dans l'algorithme de Wilcox d'ordre m , avec $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 et ces coefficients sont définis dans le Tableau 1 [1]:

Tableau 1: Définition des coefficients C_m et S_m utilisés dans l'algorithme de Wilcox d'ordre m

m	C_m	S_m
1	1	1/2
2	$1 - \phi_0^2 / 8$	1/2
3	$1 - \phi_0^2 / 8$	$1/2 - \phi_0^2 / 48$
4	$1 - \phi_0^2 / 8 + \phi_0^4 / 384$	$1/2 - \phi_0^2 / 48$
5	$1 - \phi_0^2 / 8 + \phi_0^4 / 384$	$1/2 - \phi_0^2 / 48 + \phi_0^4 / 3840$
6	$1 - \phi_0^2 / 8 + \phi_0^4 / 384 - \phi_0^6 / 46080$	$1/2 - \phi_0^2 / 48 + \phi_0^4 / 3840$

Nous pouvons observer dans le Tableau 1 que les expressions des coefficients C_m et S_m sont dépendantes de ϕ_0 , qui est calculé au temps t_n avec l'équation suivante:

$$\phi_0(t_n) = \sqrt{\Delta \phi_x^2(t_n) + \Delta \phi_y^2(t_n) + \Delta \phi_z^2(t_n)} \quad (3)$$

Les incréments des angles de roulis, tangage et lacet $\Delta\phi_x, \Delta\phi_y$ et $\Delta\phi_z$ sont utilisées dans les équations (2) et (3) et sont définis dans les équations (4):

$$\begin{aligned}\Delta\phi_x(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_x(t_n) dt = \omega_x(t_n)(t_{n+1} - t_n) = \omega_x(t_n)\Delta t, \\ \Delta\phi_y(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_y(t_n) dt = \omega_y(t_n)(t_{n+1} - t_n) = \omega_y(t_n)\Delta t, \\ \Delta\phi_z(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_z(t_n) dt = \omega_z(t_n)(t_{n+1} - t_n) = \omega_z(t_n)\Delta t.\end{aligned}\quad (4)$$

Dans les équations (4), nous avons considéré que les vitesses angulaires ω_x, ω_y et ω_z sont approximativement constantes pour un cycle d'acquisition Δt des données de gyromètres dans le processeur de navigation [3].

À l'aide de l'algorithme d'orthonormalisation du quaternion ([2]), nous obtenons la norme:

$$|Q(t_{n+1})| = \sqrt{q_0^2(t_{n+1}) + q_1^2(t_{n+1}) + q_2^2(t_{n+1}) + q_3^2(t_{n+1})} \quad (5)$$

et les paramètres normalisés au temps t_{n+1} du quaternion sont [2]:

$$\tilde{q}_1(t_{n+1}) = \frac{q_1(t_{n+1})}{|Q(t_{n+1})|}, \tilde{q}_2(t_{n+1}) = \frac{q_2(t_{n+1})}{|Q(t_{n+1})|}, \tilde{q}_3(t_{n+1}) = \frac{q_3(t_{n+1})}{|Q(t_{n+1})|}, \tilde{q}_0(t_{n+1}) = \frac{q_0(t_{n+1})}{|Q(t_{n+1})|}. \quad (6)$$

Nous obtenons la matrice équivalente R_v' en utilisant le quaternion d'attitude ([2]):

$$R_v' = \begin{bmatrix} \tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_3^2 & 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_2 - \tilde{q}_0\tilde{q}_3) & 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0\tilde{q}_2) \\ 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \tilde{q}_0\tilde{q}_3) & \tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_3^2 & 2(\tilde{q}_2\tilde{q}_3 - \tilde{q}_0\tilde{q}_1) \\ 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_3 - \tilde{q}_0\tilde{q}_2) & 2(\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0\tilde{q}_1) & \tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_3^2 - \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

La matrice des cosinus directeurs, qui fait le passage entre le système de coordonnées lié au véhicule et le trièdre horizontal local est obtenue par trois rotations successives avec des angles autour de trois axes (roulis avec l'angle ϕ_x , tangage avec l'angle ϕ_y et lacet avec l'angle ϕ_z), alors les éléments de la matrice ont les expressions suivantes ([2]):

$$\begin{aligned}r_{11} &= \cos\phi_y \cos\phi_z - \sin\phi_x \sin\phi_y \sin\phi_z, & r_{12} &= -\cos\phi_x \sin\phi_z, & r_{13} &= \sin\phi_y \cos\phi_z - \sin\phi_x \cos\phi_y \sin\phi_z, \\ r_{21} &= \cos\phi_y \sin\phi_z + \sin\phi_x \sin\phi_y \cos\phi_z, & r_{22} &= \cos\phi_x \cos\phi_z, & r_{23} &= \sin\phi_y \sin\phi_z - \sin\phi_x \cos\phi_y \cos\phi_z, \\ r_{31} &= -\cos\phi_x \sin\phi_y, & r_{32} &= \sin\phi_x, & r_{33} &= \cos\phi_x \cos\phi_y.\end{aligned}\quad (8)$$

Dans le cas où les éléments de la matrice équivalente d'attitude calculées par l'équation (7) sont connus au temps t_{n+1} , nous calculons les angles ϕ_x, ϕ_y et ϕ_z avec les équations (8). L'algorithme proposé est implémenté dans un programme qui se sert d'une fonction en Matlab et qui peut être restreint sous la

forme d'un bloc Simulink avec trois entrées multiplexées et trois sorties demultiplexées. Nous effectuons les simulations numériques pour la validation de l'algorithme proposé en utilisant des différents signaux d'entrée.

Dans le but d'éviter l'apparition de l'erreur de commutation d'intégration numérique déterminée par la méthode Wilcox (car la vitesse angulaire doit avoir la direction constante pendant un cycle de traitement numérique), alors les trois valeurs des composantes de la vitesse angulaire sont données successivement (en trois pas d'intégration) sur chaque entrée du programme dans lequel l'algorithme est implanté. Les valeurs initiales des angles d'attitude ϕ_x , ϕ_y et ϕ_z et des q_1 , q_2 , q_3 et q_0 sont les suivantes:

$$\begin{aligned} q_1(t_0) = q_2(t_0) = q_3(t_0), q_0(t_0) = 1, \\ \phi_x(t_0) = \phi_y(t_0) = \phi_z(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

L'algorithme débute par le test de la valeur d'élément $r_{32}(t_{n+1})$. D'ici débutent les instructions de conditionnement qui positionnent les angles dans les cadrans trigonométriques. Nous avons choisi cet élément car il a la forme la plus simple parmi tous les éléments. Dans cet algorithme, nous appliquons à l'entrée du système, des signaux avec différentes formes et nous utilisons une méthode Wilcox pour l'équation différentielle d'attitude. Cette méthode de premier ordre est la plus simple méthode parmi les méthodes proposées par Wilcox. Les simulations numériques ont été réalisées en appliquant la méthode de Wilcox pour tous les ordres (de 1 à 6) mais les résultats obtenus sont montrés dans ces figures pour le premier ordre, car les différences entre ces résultats et ceux obtenus en appliquant la méthode de Wilcox avec l'ordre de 2 à 6 sont petites donc les figures sont similaires pour ces types de résultats.

Pendant la première phase d'essai, les signaux appliqués seront non nuls seulement pour un canal, et les réponses prouvent que l'algorithme fonctionne pour le cas dans lequel les trois canaux ne s'influencent pas réciproquement. Dans les Figures 1, 2 et 3, les signaux d'entrée de type rampe, échelon et des combinaisons de ceux-ci sont appliquées dans le canal de roulis. Dans les Figures 4, 5 et 6 nous montrons les réponses de l'algorithme des angles d'attitudes correspondantes aux signaux d'entrée présentés dans les Figures 1, 2 et 3. Les résultats obtenus suite à l'application des signaux d'entrée dans les canaux de tangage et de lacet ont la même allure que ceux obtenus suite à l'application des signaux d'entrée dans le canal de roulis.

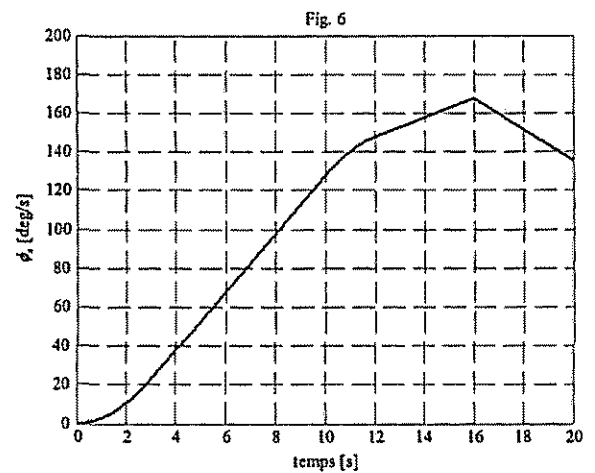
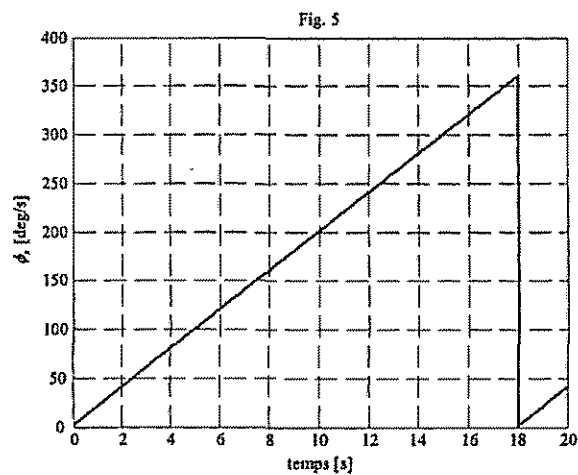
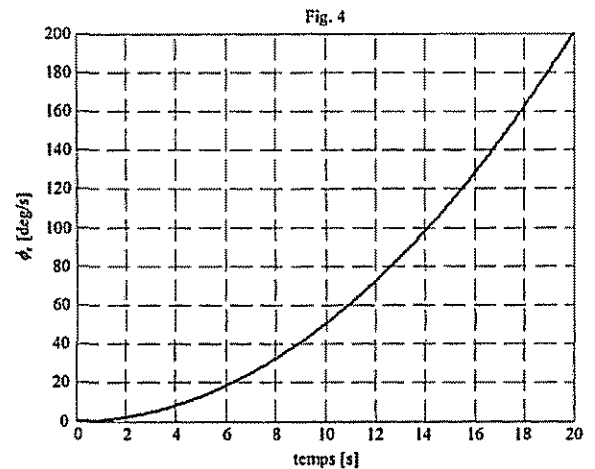
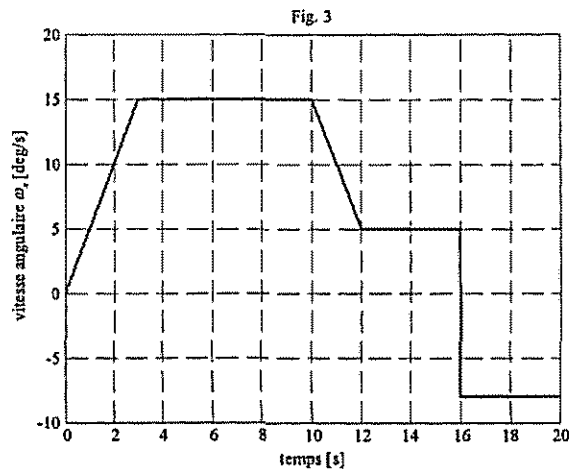
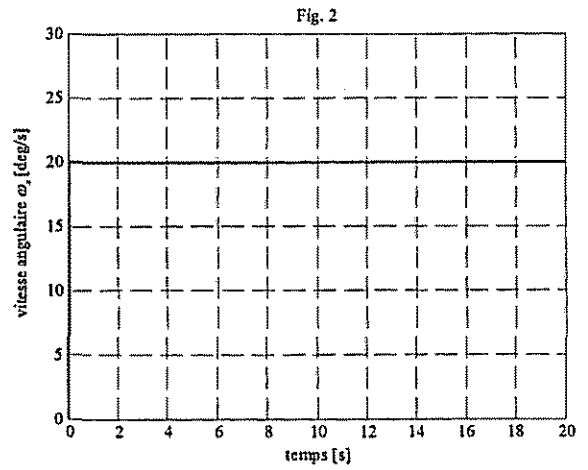
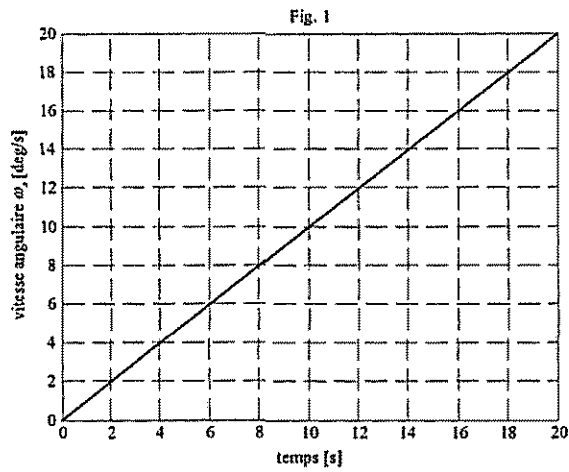
Dans la deuxième phase d'essai, nous appliquons des signaux de type échelon à l'entrée de chaque canal. Ces signaux sont décalés dans le temps (Figure 7) et sont superposées à certains intervalles de temps (Figure 8).

Dans chaque cas, en utilisant un algorithme Wilcox, nous avons considéré 100 échantillons par seconde, pendant 10 secondes. Les réponses aux deux types d'entrées montrées dans les Figures 7 et 8 sont représentées dans les Figures 9 et 10. Nous observons que l'algorithme répond très bien dans le cas de l'influence réciproque des trois canaux d'attitude. Lorsque nous appliquons simultanément des signaux non - nuls sur deux ou trois canaux, dans le calcul des angles interviennent des éléments de la matrice d'attitude qui combinent ces trois angles, ce qui explique la bonne réponse de l'algorithme (pratiquement les canaux angulaires se couplent à ces types d'entrées).

Dans les tests de l'algorithme qui utilise la méthode Wilcox d'ordre 2, 3, 4, 5 et 6, les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus en appliquant la méthode Wilcox d'ordre 1. Les déviations de la valeur réelle des angles d'attitude ont des allures similaires pour tous les 6 ordres de la méthode Wilcox.

Les valeurs des déviations absolues maximums des angles d'attitude à partir des valeurs réelles de ces angles d'attitude, par la méthode Wilcox, avec n'importe quel ordre, dans le cas d'application des deux entrées (Figures 7 et 8) sont données dans le Tableau 2.

Dans le Tableau 2, nous observons que les meilleurs ordres d'intégration sont 5 et 6 car la différence entre les résultats obtenus est très petite (voir la convergence de l'algorithme), ce qui justifie l'utilisation



d'un algorithme Wilcox d'ordre minimum de 5 avant d'utiliser des plus grandes autres ordres de troncation de la méthode. La méthode Wilcox d'ordre 5 est meilleure que la méthode Wilcox d'ordre 1 à 4, et l'utilisation de la méthode Wilcox d'ordre 6 n'est pas justifiable car elle est moins rapide que la méthode Wilcox d'ordre 5 et elle donne les mêmes erreurs.

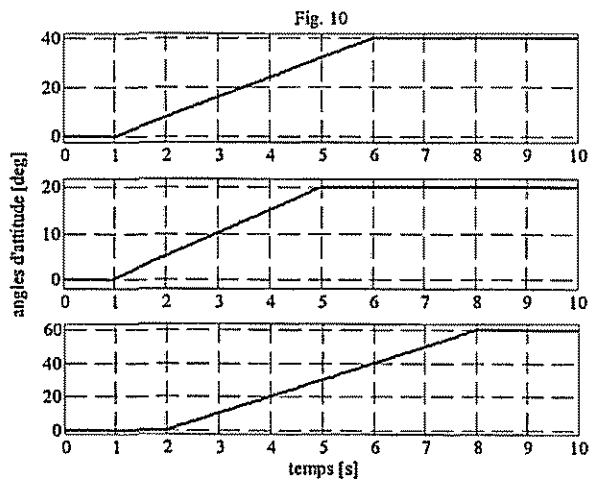
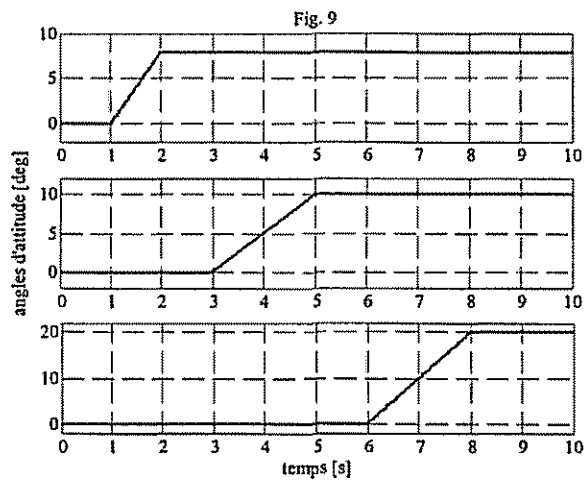
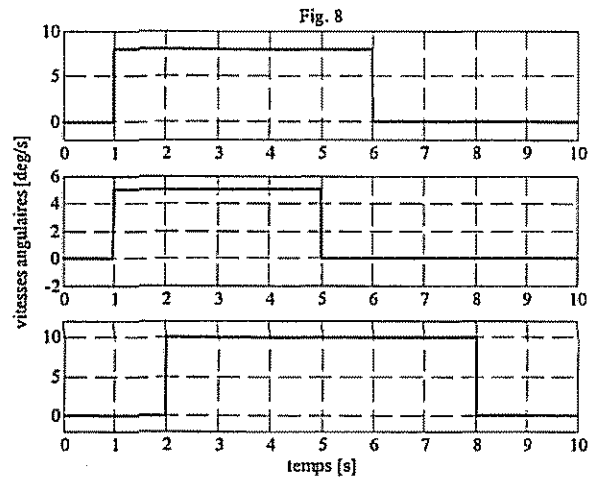
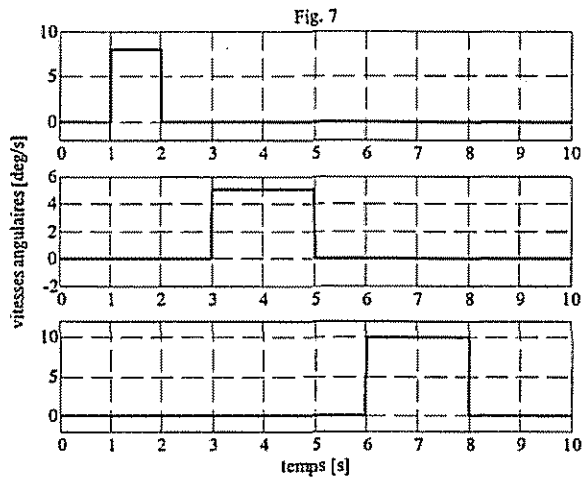


Tableau 2: Réponses (attitudes de roulis, tangage et lacet) obtenues suite aux entrées montrées dans les Figures 7 et 8

L'ordre de la méthode Wilcox	Entrée montrée dans la Figure 7			Entrée montrée dans la Figure 8		
	Roulis [deg]	Tangage [deg]	Lacet [deg]	Roulis [deg]	Tangage [deg]	Lacet [deg]
1	0.080011580305	0.091669536732	0.116711902167	0.133391585777	0.141672406798	0.283402214805
2	0.080000000127	0.091666666839	0.116666666693	0.133333333339	0.141666666668	0.283333333421
3	0.08	0.091666666667	0.116666666672	0.133333333333	0.141666666666	0.283333333332
4	0.079999999994	0.091666666666	0.116666666665	0.133333333307	0.141666666666	0.283333333223
5	0.079994209839	0.091666580993	0.116666666639	0.133304207071	0.141666580993	0.283232647940
6	0.079994209839	0.091666580993	0.116666666638	0.133304207071	0.141666580993	0.283232647939

Nous pouvons remarquer dans le Tableau 2 que les erreurs dans le canal de roulis sont les plus basses et celles dans le canal de lacet sont les plus grandes. Leurs valeurs dépendent de l'amplitude du signal appliqué, par exemple, dans le cas de l'application d'une entrée échelon, alors les valeurs des erreurs dans le canal de lacet sont trois fois plus grandes (0.28 degrés) que les erreurs dans le canal de roulis (0.08 degrés).

2.2. La Simulation Numérique De L'Algorithme Qui Utilise La Méthode Avec 2 Cadences De Calcul

L'algorithme qui utilise la méthode avec 2 cadences de calcul se complique en ce qui concerne le calcul des incréments angulaires $\Delta\phi_x, \Delta\phi_y, \Delta\phi_z$ dans les axes de roulis, tangage et lacet. Nous considérons l cycles de calcul dans l'intervalle de temps $t_{n-1} \div t_n$ et nous définissons $\Delta\alpha_x, \Delta\alpha_y$ et $\Delta\alpha_z$ ([4]) sur le cycle de calcul comme suite:

$$\Delta\alpha_x(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega_x dt, \Delta\alpha_y(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega_y dt, \Delta\alpha_z(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega_z dt. \quad (10)$$

Les valeurs de α_x, α_y et α_z au temps t_i sont calculées en fonction de α_x, α_y et α_z au temps t_{i-1} et de $\Delta\alpha_x, \Delta\alpha_y$ et $\Delta\alpha_z$ au temps t_i comme suite :

$$\alpha_x(t_i) = \alpha_x(t_{i-1}) + \Delta\alpha_x(t_i), \alpha_y(t_i) = \alpha_y(t_{i-1}) + \Delta\alpha_y(t_i), \alpha_z(t_i) = \alpha_z(t_{i-1}) + \Delta\alpha_z(t_i) \quad (11)$$

avec les conditions initiales suivantes ([4]):

$$\alpha_x(t_i) = \alpha_y(t_i) = \alpha_z(t_i) = 0 \text{ au temps } t_i = t_{n-1}. \quad (12)$$

Nous obtenons ([4]):

$$\alpha_x(t_n) = \alpha_x(t_i), \alpha_y(t_n) = \alpha_y(t_i), \alpha_z(t_n) = \alpha_z(t_i) \text{ au temps } t_i = t_n, \quad (13)$$

Nous définissons $\Delta\beta_x, \Delta\beta_y$ et $\Delta\beta_z$ au temps t_i [4] et β_x, β_y et β_z [4]:

$$\beta_x(t_i) = \beta_x(t_{i-1}) + \Delta\beta_x(t_i), \beta_y(t_i) = \beta_y(t_{i-1}) + \Delta\beta_y(t_i), \beta_z(t_i) = \beta_z(t_{i-1}) + \Delta\beta_z(t_i) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta\beta_x(t_i) &= \frac{1}{2} \left[\alpha_y(t_{i-1}) + \frac{1}{6} \Delta\alpha_y(t_{i-1}) \right] \alpha_z(t_i) - \frac{1}{2} \left[\alpha_z(t_{i-1}) + \frac{1}{6} \Delta\alpha_z(t_{i-1}) \right] \alpha_y(t_i), \\ \Delta\beta_y(t_i) &= \frac{1}{2} \left[\alpha_z(t_{i-1}) + \frac{1}{6} \Delta\alpha_z(t_{i-1}) \right] \alpha_x(t_i) - \frac{1}{2} \left[\alpha_x(t_{i-1}) + \frac{1}{6} \Delta\alpha_x(t_{i-1}) \right] \alpha_z(t_i), \\ \Delta\beta_z(t_i) &= \frac{1}{2} \left[\alpha_x(t_{i-1}) + \frac{1}{6} \Delta\alpha_x(t_{i-1}) \right] \alpha_y(t_i) - \frac{1}{2} \left[\alpha_y(t_{i-1}) + \frac{1}{6} \Delta\alpha_y(t_{i-1}) \right] \alpha_x(t_i), \end{aligned} \quad (15)$$

avec les conditions initiales ([4]):

$$\beta_x(t_i) = \beta_y(t_i) = \beta_z(t_i) = 0 \text{ au temps } t_i = t_{n-1}. \quad (16)$$

Nous obtenons ([4]):

$$\beta_x(t_n) = \beta_x(t_i), \beta_y(t_n) = \beta_y(t_i), \beta_z(t_n) = \beta_z(t_i) \text{ au temps } t_i = t_n. \quad (17)$$

Nous calculons les incréments angulaires à l'aide de relations (10)-(17):

$$\begin{aligned} \Delta\phi_x(t_n) &= \alpha_x(t_n) + \beta_x(t_n), \\ \Delta\phi_y(t_n) &= \alpha_y(t_n) + \beta_y(t_n), \\ \Delta\phi_z(t_n) &= \alpha_z(t_n) + \beta_z(t_n). \end{aligned} \quad (18)$$

Les paramètres du quaternion d'attitude au temps t_{n+1} s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} q_1(t_{n+1}) &= q_1(t_n) + \frac{\Delta\phi_z(t_n)}{2} q_2(t_n) - \frac{\Delta\phi_y(t_n)}{2} q_3(t_n) + \frac{\Delta\phi_x(t_n)}{2} q_0(t_n), \\ q_2(t_{n+1}) &= -\frac{\Delta\phi_z(t_n)}{2} q_1(t_n) + q_2(t_n) + \frac{\Delta\phi_x(t_n)}{2} q_3(t_n) + \frac{\Delta\phi_y(t_n)}{2} q_0(t_n), \\ q_3(t_{n+1}) &= \frac{\Delta\phi_y(t_n)}{2} q_1(t_n) - \frac{\Delta\phi_x(t_n)}{2} q_2(t_n) + q_3(t_n) + \frac{\Delta\phi_z(t_n)}{2} q_0(t_n), \\ q_0(t_{n+1}) &= -\frac{\Delta\phi_x(t_n)}{2} q_1(t_n) - \frac{\Delta\phi_y(t_n)}{2} q_2(t_n) - \frac{\Delta\phi_z(t_n)}{2} q_3(t_n) + q_0(t_n). \end{aligned} \quad (19)$$

L'algorithme obtenu est presque identique avec l'algorithme proposé antérieurement, la seule différence consistant dans l'absence d'erreur de commutation, ce qui nous permet d'appliquer signaux simultanément sur les trois entrées du programme dans lequel l'algorithme est implémenté.

En appliquant au programme de simulation avec deux cadences de calcul les mêmes entrées que celles utilisées dans le cas de l'application de la méthode Wilcox, nous obtenons des caractéristiques graphiques identiques. Les déviations absolues maximums des angles d'attitude à partir de leurs valeurs réelles, dans le cas d'application des deux entrées (montrées dans les Figures 7 et 8) sont données dans le Tableau 3.

Tableau 3: Réponses (attitudes de roulis, tangage et lacet) obtenues suite aux entrées montrées dans les Figures 7 et 8

Entrée montrée dans la Figure 7			Entrée montrée dans la Figure 8		
Roulis [deg]	Tangage [deg]	Lacet [deg]	Roulis [deg]	Tangage [deg]	Lacet [deg]
0.079999987554	0.091667489569	0.116700572332	0.133335667523	0.141666835524	0.283332647753

Nous observons que les ordres des valeurs résultées oscillent entre 2 et 3 dans le cas de l'application de la méthode Wilcox en comparant les résultats montrés dans le Tableau 2 aux résultats montrés dans le Tableau 3.

Dans le but d'effectuer les tests en temps réel, suite aux résultats montrés au Tableau 2, nous allons

choisir l'algorithme dans lequel la méthode Wilcox d'ordre 5 est utilisée pour l'intégration de l'équation d'attitude. La contribution principale du travail ici présenté consiste dans l'utilisation de la méthode Wilcox plus rapide que la méthode avec 2 cadences et améliorée avec l'artifice ici présenté avec la carte d'acquisition.

3. L'ETUDE EXPERIMENTALE DE L'ALGORITHME D'ATTITUDE

L'algorithme de Wilcox est testé avec un système inertiel à composants liés, constitué par trois gyromètres qui offrent à la sortie des tensions de maximum 10 V en courant continu et mesurent les vitesses angulaires jusqu'à la valeur maximum de 100°/s.

L'étalonnage des gyromètres est réalisé avec une plate-forme rotative dont la vitesse angulaire peut être contrôlée avec précision. Les valeurs obtenues pour les vitesses angulaires au parcours de l'étalonnage ont été utilisées pour déterminer la fonction d'étalonnage. La fonction d'étalonnage a été approximé avec une méthode polynomiale en utilisant un programme en Matlab.

Le système d'acquisition contient trois gyromètres à composants liés et une carte d'acquisition Axiom AX5412 qui est utilisée pour la conversion de la tension du format analogique en format numérique (Figure 11). Parmi les caractéristiques techniques de la carte d'acquisition, nous pouvons mentionner: 16 canaux analogiques (16 entrées A/D) avec une résolution de 12 bits à une fréquence d'échantillonnage de 60 kHz, la tension d'entrée est ± 10 V, les 2 canaux sont numériques - analogiques (2 sorties D/A), la tension de sortie a des valeurs situées dans l'intervalle 0-5 V ou 0-10 V, les 24 canaux sont numériques (sorties) et les autres 24 canaux sont numériques (entrées).

L'adresse de base de la carte d'acquisition est 300 H. Parmi 16 entrées A/D dans l'application, seulement les premières trois entrées (0, 1, 2) sont utilisées.

La visualisation des angles d'attitude a été réalisée avec une interface graphique crée dans le programme Matlab/Simulink, dans lequel des boîtes de contrôles de la librairie Matlab ont été utilisées.

Le test expérimental de l'algorithme a été réalisé pour des rotations appliquées successivement autour des trois axes du système à composants liés avec les vitesses angulaires de 5°/s, 10°/s et 15°/s, en utilisant trois cadences d'échantillonnage (100 échantillons/s, 200 échantillons/s et 500 échantillons/s) sur des intervalles différentes de temps pour l'étape d'acquisition (10 s, 30 s et 60 s).

Les résultats obtenus pour chaque canal (roulis, tangage et lacet) sont invariables avec la cadence d'échantillonnage, mais les erreurs résultantes dépendent de la cadence d'échantillonnage, du signal de la vitesse angulaire appliquée et du temps d'acquisition.

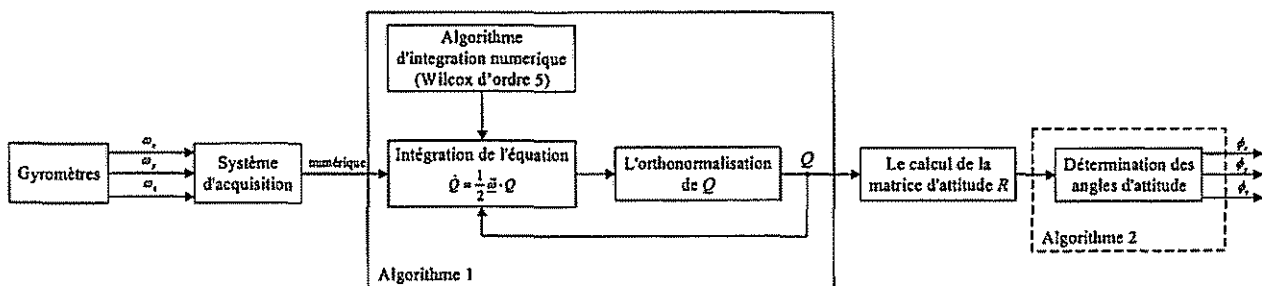
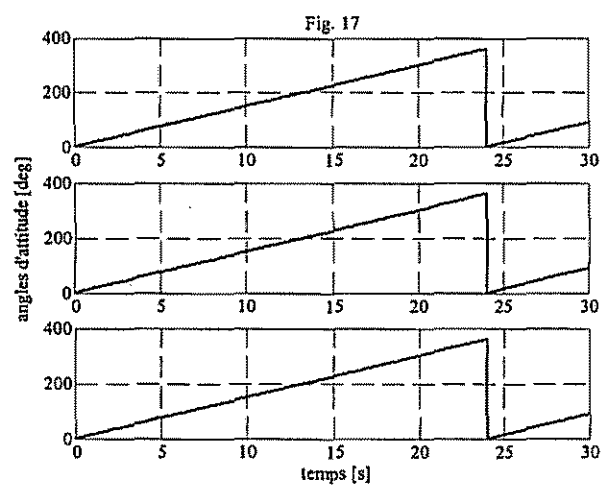
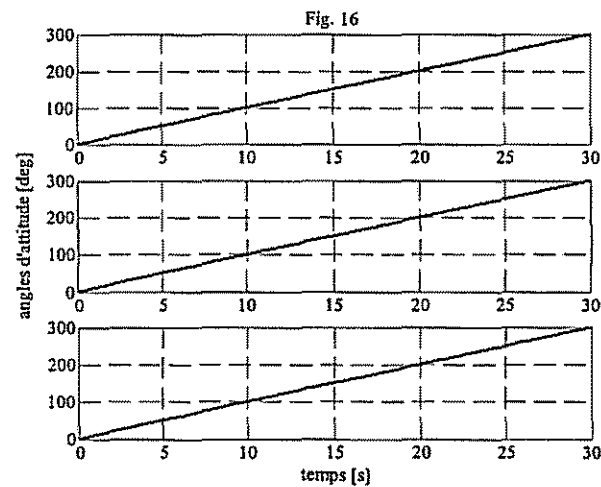
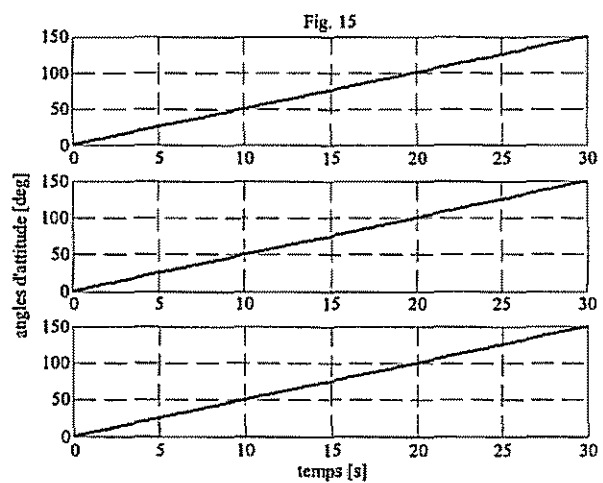
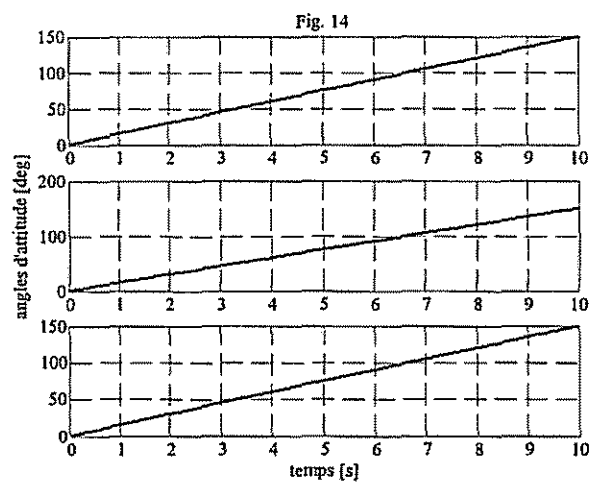
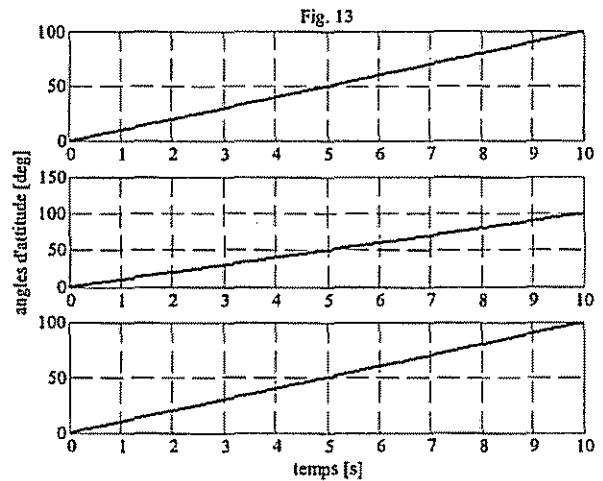
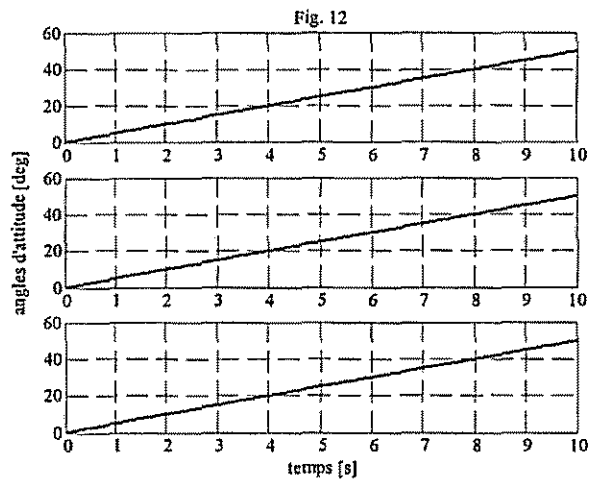
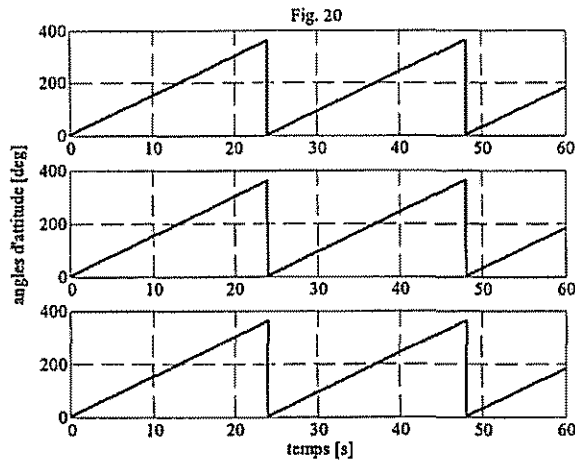
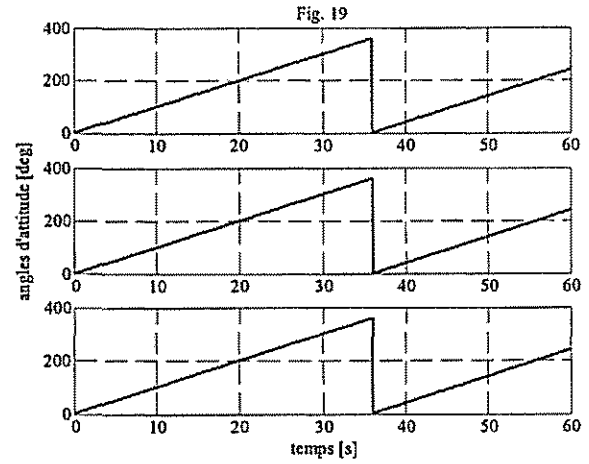
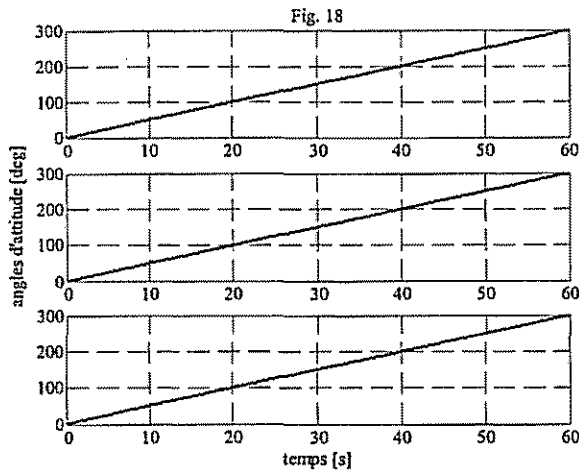


Figure 11 Le montage de test

Les résultats sont obtenus pour l'acquisition du signal pendant trois intervalles de temps et sont représentés sur les Figures 12 à 20. Sur un intervalle de temps de 10 secondes, les résultats sont représentés sur les Figures 12 (pour 5°/s), 13 (pour 10°/s) et 14 (pour 15°/s). Sur un intervalle de temps de



30 secondes, les résultats sont représentés sur les Figures 15 (pour $5^{\circ}/s$), 16 (pour $10^{\circ}/s$) et 17 (pour $15^{\circ}/s$); et sur un intervalle de temps de 60 secondes, les résultats sont représentés sur les Figures 18 (pour $5^{\circ}/s$), 19 (pour $10^{\circ}/s$) et 20 (pour $15^{\circ}/s$).



Les déviations des angles d'attitude à partir de leurs valeurs réelles pour tous les cas sont données dans le Tableau 4. Nous constatons que le meilleur taux d'échantillonnage est de 500 échantillons par seconde, car ce taux produit des erreurs 5 fois plus petites que les erreurs produites par le taux d'échantillonnage de 100 échantillons/s.

Tableau 4: Les déviations des angles d'attitude à partir de leurs valeurs réelles suite aux tests en temps réel

Temps	Vitesse angulaire	100 échantillons			200 échantillons			500 échantillons		
		Roulis [deg]	Tangage [deg]	Lacet [deg]	Roulis [deg]	Tangage [deg]	Lacet [deg]	Roulis [deg]	Tangage [deg]	Lacet [deg]
10 s	5 °/s	0.075	0.125	0.075	0.025	0.037	0.05	0.013	0.015	0.017
	10 °/s	0.15	0.25	0.15	0.05	0.075	0.1	0.026	0.03	0.034
	15 °/s	0.225	0.375	0.225	0.075	0.112	0.15	0.039	0.045	0.051
30 s	5 °/s	0.097	0.162	0.097	0.032	0.048	0.065	0.016	0.019	0.022
	10 °/s	0.196	0.328	0.196	0.065	0.098	0.13	0.034	0.039	0.044
	15 °/s	0.316	0.525	0.316	0.11	0.16	0.21	0.054	0.063	0.072

60 s	5 °/s	0.176	0.294	0.18	0.06	0.088	0.12	0.03	0.035	0.04
	10 °/s	0.365	0.62	0.365	0.12	0.18	0.24	0.065	0.075	0.084
	15 °/s	0.6	0.98	0.595	0.197	0.294	0.393	0.102	0.118	0.134

Nous observons une grande dépendance presque linéaire de l'erreur avec l'amplitude du signal de la vitesse angulaire appliquée. Nous observons aussi l'influence du temps d'acquisition de l'erreur de calcul des angles d'attitude, qui n'est pas très grande.

Les valeurs des erreurs minimales sont enregistrées à la cadence de 500 échantillons/s dans le canal de roulis, et les erreurs maximales sont enregistrées à la cadence de 100 échantillons/s dans le canal de tangage.

La plus grande erreur est enregistrée dans le canal de tangage, et a la valeur de 0.98 degrés après 60 s à la cadence de 100 échantillons/s, tandis que la plus petite erreur est 0.013 degrés en roulis après 10 s à la cadence de 500 échantillons/s.

4. CONCLUSIONS

La méthode proposée remplace un algorithme très précis mais lent (avec deux cadences de calcul) avec un algorithme plus rapide de type Wilcox, qui est amélioré avec un artifice numérique lié à la carte d'acquisition, dans le but de l'enlèvement d'erreur de commutation induite. Deux algorithmes numériques sont conçus pour: 1. L'intégration de l'équation Poisson d'attitude et 2. La détermination des angles à partir des éléments de la matrice d'attitude.

La méthode est validée par des simulations numériques en utilisant: 1. La méthode d'intégration de Wilcox impliquant des erreurs de commutation, pour des différents ordres de troncature, et 2. La méthode d'intégration avec un algorithme impliquant deux cadences de calcul.

Pendant la première phase d'essai, les signaux appliqués seront non nuls seulement pour un canal, et les réponses prouvent que l'algorithme fonctionne pour le cas dans lequel les trois canaux ne s'influencent pas réciproquement; les signaux d'entrée de type rampe, échelon et des combinaisons de ceux-ci sont appliquées à l'entrée de chaque canal d'attitude.

Dans la deuxième phase d'essai, nous appliquons des signaux de type échelon à l'entrée de chaque canal. Pour tester le cas de l'influence réciproque des trois canaux d'attitude les signaux appliqués sont décalés dans le temps et sont superposés à certains intervalles de temps.

Dans le Tableau 2 et Tableau 3, nous observons que les meilleurs ordres d'intégration pour la méthode Wilcox sont 5 et 6 car la différence entre les résultats obtenus est très petite, ce qui justifie l'utilisation d'un algorithme Wilcox d'ordre minimum de 5 avant d'utiliser des plus grandes autres ordres de troncature de la méthode. La méthode Wilcox d'ordre 5 est meilleure que la méthode Wilcox d'ordre 1 à 4 et que la méthode utilisant deux cadences, et l'utilisation de la méthode Wilcox d'ordre 6 n'est pas justifiable car elle est moins rapide que la méthode Wilcox d'ordre 5 et elle donne les mêmes erreurs (la méthode doit être utilisée en temps réel). Aussi, nous pouvons remarquer dans le Tableau 2 que les erreurs dans le canal de roulis sont les plus basses et celles dans le canal de lacet sont les plus grandes. Leurs valeurs dépendent de l'amplitude du signal appliqué, par exemple, dans le cas de l'application d'une entrée échelon, alors les valeurs des erreurs dans le canal de lacet sont trois fois plus grandes (0.28 degrés) que les erreurs dans le canal de roulis (0.08 degrés).

Des essais expérimentaux sont réalisés en temps réel pour valider les meilleures variantes des algorithmes d'intégration résultés des simulations numériques. L'algorithme est testé avec un système inertiel à composants liés, constitué par trois gyromètres qui offrent à la sortie des tensions de maximum 10 V en courant continu et mesurent les vitesses angulaires jusqu'à la valeur maximum de 100°/s.

Suite aux études en temps réel, nous avons conclu que le meilleur taux d'échantillonnage est de 500

échantillons par seconde, car ce taux produit des erreurs 5 fois plus petites que les erreurs produites par le taux d'échantillonnage de 100 échantillons/s. Nous observons une grande dépendance presque linéaire de l'erreur avec l'amplitude du signal de la vitesse angulaire appliquée. Nous observons aussi l'influence du temps d'acquisition de l'erreur de calcul des angles d'attitude, qui n'est pas très grande.

Les valeurs des erreurs minimales sont enregistrées à la cadence de 500 échantillons/s dans le canal de roulis, et les erreurs maximales sont enregistrées à la cadence de 100 échantillons/s dans le canal de tangage.

La plus grande erreur est enregistrée dans le canal de tangage, et a la valeur de 0.98 degrés après 60 s à la cadence de 100 échantillons/s, tandis que la plus petite erreur est 0.013 degrés en roulis après 10 s à la cadence de 500 échantillons/s.

5. BIBLIOGRAPHIE

1. Radix, J.C. „*Systèmes inertiels a composants liés <<Strap-Down>>*”, Cepadues - Éditions, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace SUPAERO, Toulouse, 1993.
2. Salychev, O.S. „*Inertial Systems in Navigation and Geophysics*”. Bauman MSTU Press, Moscou, Russie, 1998.
3. Farrell, J., Barth, M. „*The Global Positioning System and Inertial Navigation*”. Édition McGraw – Hill, New York, 1999.
4. Savage, P.G. „*Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1: Attitude Algorithms*”. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 1, Janvier - Février, 1998.

NOMENCLATURE

C_m, S_m	=	des coefficients dans l'algorithme de Wilcox d'ordre m
Q, R_i^t	=	le quaternion d'attitude, respectivement la matrice d'attitude qui réalise le passage entre le trièdre véhicule et le trièdre horizontal local
q_0, q_1, q_2, q_3	=	les composantes du quaternion d'attitude Q
r_{ij}	=	l'élément ij de la matrice R_i^t
t	=	le temps
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$	=	les composantes des incréments des angles de roulis, tangage et lacet dans la méthode d'intégration avec deux cadences de calcul
$\beta_x, \beta_y, \beta_z$	=	les erreurs qui caractérisent les incréments des angles de roulis, tangage et lacet dans la méthode d'intégration avec deux cadences de calcul
$\Delta\alpha_x, \Delta\alpha_y, \Delta\alpha_z$	=	les incréments angulaires dans la méthode d'intégration avec deux cadences de calcul
$\Delta\beta_x, \Delta\beta_y, \Delta\beta_z$	=	les incréments d'erreurs dans la méthode d'intégration avec deux cadences de calcul
$\Delta\phi_x, \Delta\phi_y, \Delta\phi_z$	=	les incréments des angles de roulis, tangage et lacet
ϕ_0	=	la norme des incréments des angles d'attitude
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	=	angles d'attitude (roulis, tangage et lacet)
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	=	les composantes de la vitesse angulaire mesurée par les gyromètres
m	=	l'ordre de l'algorithme Wilcox
n, l	=	les indices de temps