

# BIDIMENSIONAL FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SPUR GEAR: STUDY OF THE MESH STIFFNESS AND STRESS AT THE LEVEL OF THE TOOTH FOOT

Mohamed Nizar Bettaieb<sup>a,c</sup>, Mohamed Maatar<sup>a,b</sup>, Chafik Karra<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *Unité de dynamique des systèmes mécaniques, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, B.P W, 3038 Sfax Tunisie*

<sup>b</sup> *Département de Technologie, Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Sfax, Route de Menzel Chaker  
Km 0,5 BP 805 3018 Sfax Tunisie*

<sup>c</sup> *Département de Génie Mécanique, Institut Supérieur des Sciences Appliquées et de Technologie de Sousse, Cité  
Taffala - B.P. No. 40 – 4003, Sousse*

*E-mail: chafik.karra@ipeis.rnu.tn; chafik\_karra@yahoo.fr*

Received August 2005, Accepted January 2009

No. 05-CSME-49, E.I.C. Accession 2901

---

## ABSTRACT

The purpose of this work is to determine the spur gear mesh stiffness and the stress state at the level of the tooth foot. This mesh stiffness is derived from the calculation of the normal tooth displacements: local displacement where the load is applied, tooth bending displacement and body displacement [15]. The contribution of this work consists in, basing on previous works, developing optimal finite elements model in time calculation and results precision. This model permits the calculation of time varying mesh stiffness and the evaluation of stress state at the tooth foot. For these reasons a specific Fortran program was developed. It permit firstly, to obtain the gear geometric parameters (base radii, outside diameter,...) and to generate the data base of the finite element meshing of a tooth or a gear. This program is interfaced with the COSMOS/M finite element software to predict the stress and strain state and calculate the mesh stiffness of a gear system. It is noted that the mesh stiffness is periodic and its period is equal to the mesh period.

---

## MODÉLISATION BIDIMENSIONNELLE PAR ÉLÉMENTS FINIS D'UN ENGRENAGE DROIT : ÉTUDE DE LA RAIDEUR D'ENGRENNEMENT ET DES CONTRAINTES AU PIED DE DENT

### RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail consiste à déterminer la raideur d'engrenement d'un engrenage droit parallèle et étudier les contraintes au pied de dent. Cette raideur d'engrenement se déduit à partir des déplacements normaux de la dent : déplacement local au niveau de la position de la charge, déplacement de flexion de la dent et déplacement dû aux déformations du corps d'engrenages [15]. La contribution de cet article consiste, en se basant sur les travaux existants, à élaborer un modèle d'éléments finis optimal en temps de calcul et de précision de résultats permettant à la fois de calculer l'évolution temporelle de la raideur d'engrenement et d'évaluer les contraintes au pied de dent. Pour cela un programme spécifique en Fortran a été développé. Il permet de calculer les caractéristiques géométriques d'une roue dentée (rayon de base, diamètre extérieur, pas de base apparent etc.) et générer la base de données du maillage élément finis d'une dent ou d'une roue dentée. Ce programme est interfacé avec le logiciel élément finis COSMOS/M pour déterminer l'état de déformation et de contrainte et calculer la raideur d'un couple de dents en prise qui permet par la suite de déterminer la raideur d'engrenement instantanée. Cette raideur est périodique sous forme de créneau de période égale à la période d'engrenement.

## 1. INTRODUCTION

Le bruit rayonné par les boîtes de vitesses résulte d'une excitation vibratoire générée par l'engrènement qui produit des surcharges dynamiques sur les dentures transmises au carter à travers les lignes d'arbres et les roulements. Les sources principales des vibrations et de bruits sont générées par la variation de la raideur d'engrènement du couple de roues dentées en prise due à la variation de la longueur de contact au cours du temps et par les écarts géométriques : Kassaï [2], Kohler [3], Remmers [4], Umezawa [5], Welbourn [6], Vexex [7], Rigaud [8] et Lin [9]. La raideur d'engrènement est généralement introduite dans les modèles théoriques afin d'étudier le comportement dynamique des transmissions par engrenages, Furukawa [10], Kasuba [11], Kohler [3], Maatar [12], Reiger [13] et Vexex [14], il est donc très important de calculer cette raideur d'engrènement instantanée avec une grande précision. Différentes méthodes approximatives sont utilisées pour la détermination de cette raideur. Henriot [15] propose une formule empirique pour le calcul d'une valeur moyenne de la rigidité d'engrènement, d'autres travaux Cornell [16], Furrow [17], Tobe [18] et Tavakoli [19], calculent cette raideur en modélisant la dent par une poutre de section variable encastree à sa base. Récemment, l'apparition des codes d'éléments finis a permis une approche plus générale des déformations élastiques des engrenages. De nombreux auteurs ont appliqué cette méthode, en particulier, Chabert [20], Hidaka [21], Wang [22], Vexex [14] et Sinsot [23] en élasticité bidimensionnelle, Mathis [24] et Tobe [18,25,26] en élasticité tridimensionnelle. Dans ces travaux la déformation de voile (corps de la roue dentée) n'est pas prise en considération dans la détermination de la raideur d'engrènement.

Dans ce travail on utilise la méthode des éléments finis pour calculer la raideur d'engrènement instantanée d'un couple de roues dentées en prise. La roue dentée est supposée encastree au niveau de son rayon intérieur (niveau de la liaison arbre-pignon) ce qui permet de tenir compte de la déformation de sa voile. A partir du champ de déplacement de la dent chargée, on détermine la raideur équivalente de celle ci et du couple de dents en prise. Finalement, la raideur d'engrènement de deux roues dentées est évaluée en fonction de la variation au cours du temps de la longueur de contact rapportée au pas de base. On montre que cette raideur est périodique sous forme de créneau de période égale à la période d'engrènement et dépend du couple de roues en prise.

L'amorçage des fissures et des ruptures d'une dent lors de l'engrènement sont généralement localisées à son pied. Pour cela, une étude des contraintes au pied de dent a été menée. Ces contraintes sont maximales quand le couple de dents considéré supporte la totalité de la charge. Il se révèle que cette phase d'engrènement est la plus dangereuse vis à vis de la tenue en service des engrenages.

## 2. DETERMINATION DE LA RAIDEUR EQUIVALENT

On construit le maillage d'une roue dentée, encastree au niveau de son rayon intérieur (conditions d'encastrement arbre-roue dentée) et soumise à l'action mécanique de l'autre roue caractérisée par une force concentrée  $F$  de 1615 N appliquée à un nœud souhaité (ns) du profil actif de la dent (Figure 1). Les caractéristiques géométriques de la roue sont données dans le tableau 1.

La raideur équivalente par unité de longueur de la dent est déterminée à partir de l'effort par unité de longueur ( $F/L$ ) rapporté au déplacement global  $\delta_{eq}$  ( $\delta_{eq}$  est le déplacement total obtenu au nœud chargé pris dans le sens de cette charge). Sous une forme adimensionnée en rapportant cette raideur au module de Young  $E$  ( $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ), on obtient :

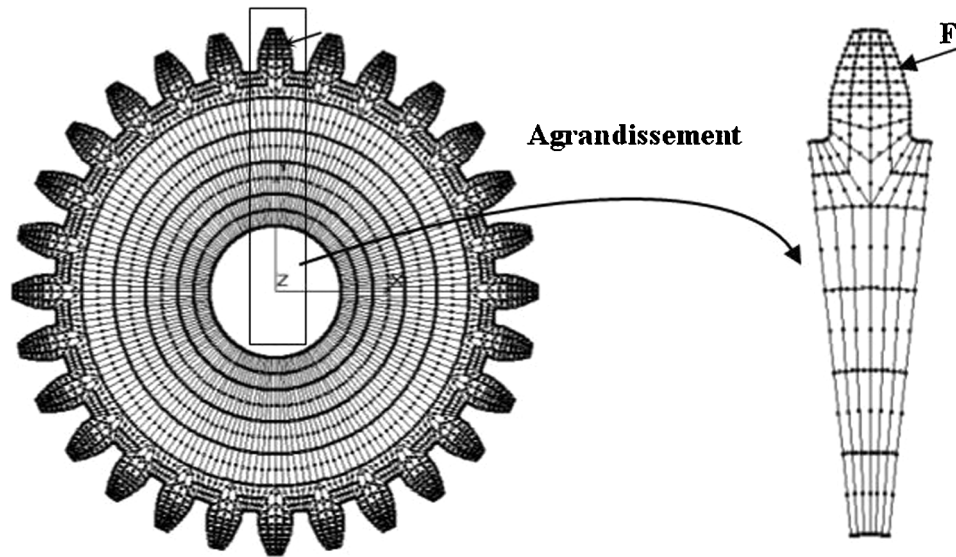


Fig. 1. Maillage de la roue dentée.

Tableau 1. Caractéristiques de la roue dentée.

Caractéristiques de la roue dentée	
Nombre de dents Z (sans unité)	28
Largeur de denture L (en mm)	6,25
Module M (en mm)	3,175
Angle de pression $\alpha$ (en degrés)	20
Coefficient de creux $hf/M$ (sans unité)	1,4
Coefficient de saillie $ha/M$ (sans unité)	1
Rayon de raccordement en pied de dent Rc (en mm)	0,635
Diamètre intérieure $\phi_{int}$ (en mm)	24

$$\overline{K}_{eq} = \frac{F/L}{\delta_{eq}} E \quad (1)$$

Pour simuler l'engrènement, on déplace la force F le long du profil et on calcule le déplacement global  $\delta_{eq}$  du nœud chargé. Ainsi on peut calculer la raideur équivalente associée. On répète ce travail pour les dix sept premiers nœuds du profil de la dent étudiée, qui englobent généralement le profil actif quelque soit le couple de dents engrénées. Il faut souligner que la force F doit être toujours normale au profil de la dent au nœud choisi. La figure 2 représente la flexibilité équivalente (inverse de la raideur équivalente) en fonction de la distance entre le rayon où la force est appliquée ( $r_m$ ) et le rayon primitif de taillage ( $r_o$ ), rapportée au module (M) donné par la relation:

$$\overline{d} = \frac{r_m - r_o}{M} \quad (2)$$

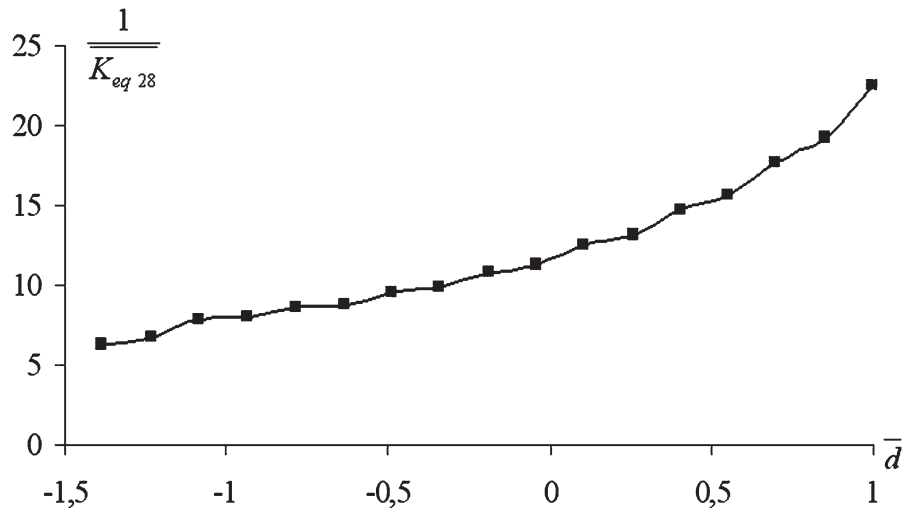


Fig. 2. Flexibilité équivalente (Z=28 dents).

Pour tester la validité du résultat concernant la flexibilité équivalente, on présente dans la figure 3 une comparaison avec les travaux de Arafa et al [27], Choi et al [28] et de Chakraborti et al [29]. Sur cette figure, on présente la flexibilité en fonction de la distance  $S'$ ,  $S'$  étant la distance le long de la ligne d'action, entre le point au niveau du rayon primitif et le point de contact, adimensionnée par rapport au module. Les résultats numériques de ce travail montrent une bonne concordance avec ceux de Choi et al [28] et de Arafa et al [27] où l'écart relatif ne dépasse pas, dans le cas le plus défavorable, 7.5 %. Les résultats obtenus par Chakraborti et al [29] sont au dessous des résultats obtenus par Choi et al [28], de Arafa et al [27] et notre modèle, cela peut s'expliquer, probablement, par le fait que Chakraborti et al [29] n'ont pas tenu dans leur modèle de la flexibilité de la jante.

### 3. CALCUL DE LA RAIDEUR D'ENGRENNEMENT D'UN COUPLE DE DENT EN PRISE

En tenant compte de la raideur équivalente calculée précédemment, on passe au calcul de la raideur d'un couple de dents en prise. La détermination de cette raideur est essentielle pour le calcul de la raideur d'engrènement d'un couple de deux roues dentées.

En premier lieu nous considérons deux roues dentées ayant toutes les deux 28 dents, la figure 4 représente la flexibilité équivalente d'une dent du pignon, de la dent adjacente de la roue et la flexibilité correspondante des deux dents en prise. La flexibilité d'un couple de dents en prise est la somme des deux flexibilités équivalentes des deux dents prise séparément tel que :

$$\frac{1}{K_{eq(28/28)}} = \frac{1}{K_{eq1(28)}} + \frac{1}{K_{eq2(28)}} \quad (3)$$

Ces trois flexibilités sont représentées sur la figure 4 en fonction de la distance  $S$  parcourue du point d'engrènement  $M$  le long de la ligne d'action adimensionnée par rapport au pas de base apparent.

Afin d'expliquer clairement cette distance  $S$  on montre sur la figure 5 un pignon et une roue en prise tel que :

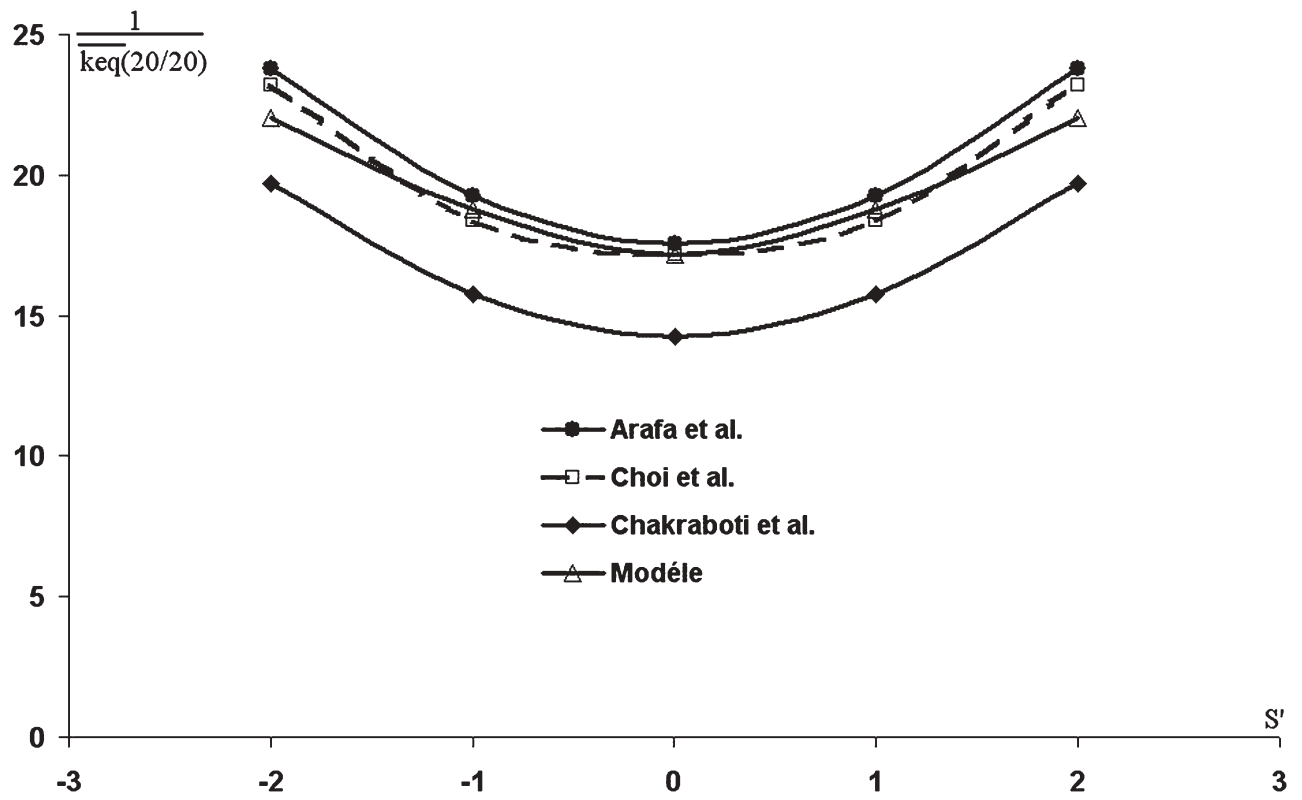


Fig. 3. Comparaison de la flexibilité équivalente avec d'autres travaux ( $Z1=20$ ,  $Z2=20$ ,  $\alpha=20^\circ$ ,  $M=2\text{mm}$ ,  $h_a/M=1$ ,  $h_f/M=1.25$ ,  $F=3325$ ,  $L=5\text{mm}$ ).

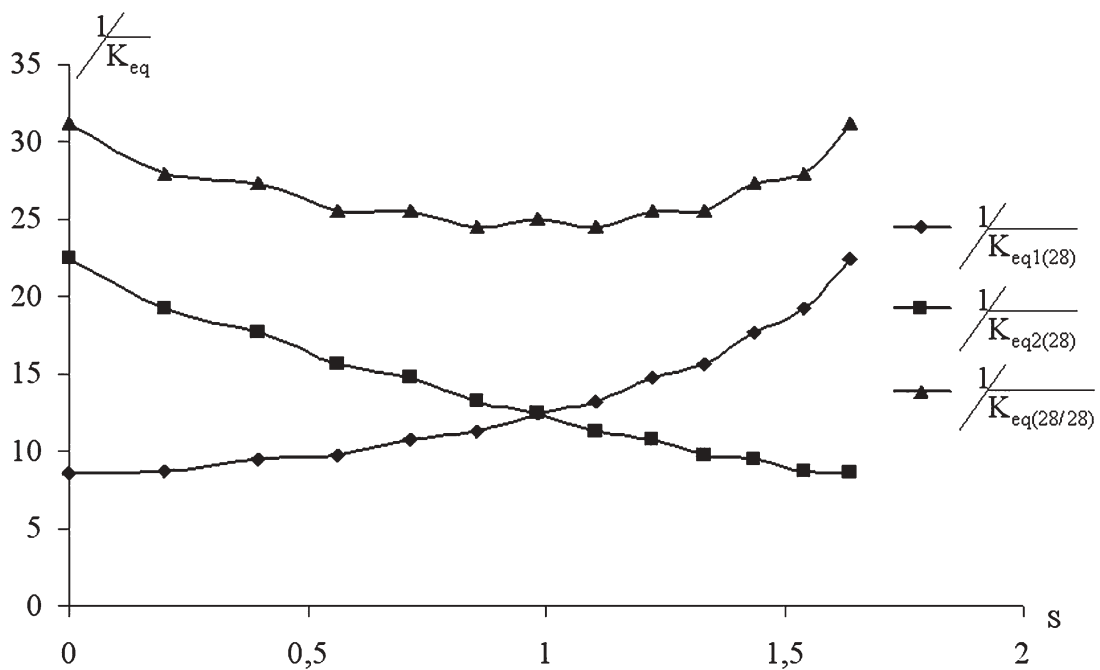


Fig. 4. Flexibilité d'un couple de dents en contact.

- $T_1T_2$  est la distance entre les deux points d'intersection du plan d'action avec les deux cercles de base du pignon et de la roue. La droite  $T_1T_2$  est la ligne d'action de l'engrenage.
- $T'_1$  et  $T'_2$  sont les points du début et de fin d'engrènement.
- $S$  est donc la distance parcourue par le point d'engrènement instantané  $M$  sur la ligne d'action compté à partir de  $T'_1$  (rapporté au pas de base apparent).

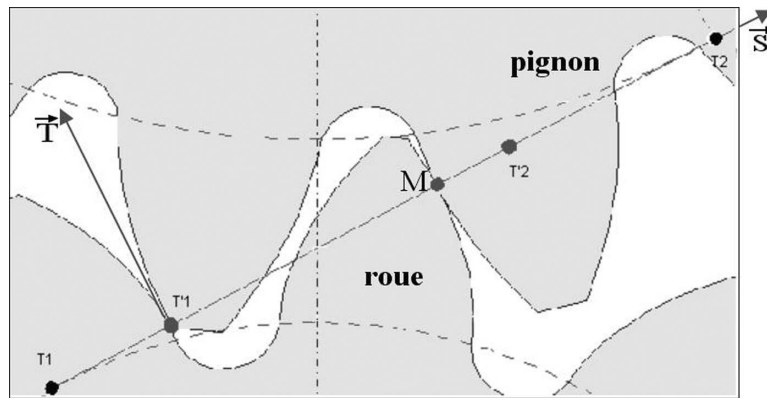


Fig. 5. Phénomène d'engrènement d'un pignon et d'une roue.

En inversant la flexibilité du couple de dents en contact trouvée, on obtient la raideur d'un couple de dents en contact comme le montre la figure 6.

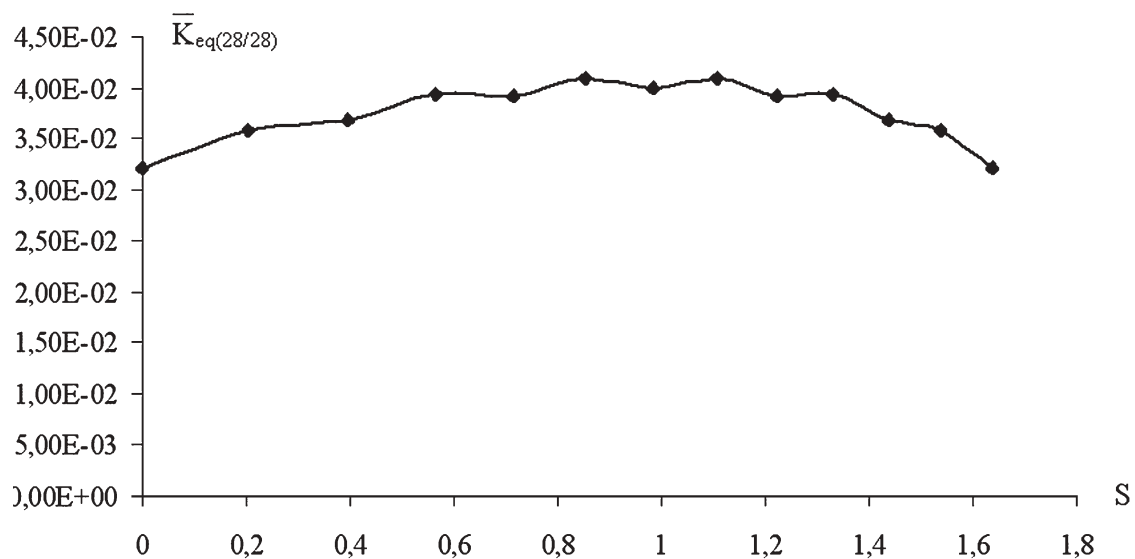


Fig. 6. Raideur d'un couple de dents en contact.

Sur la figure 7 on représente trois courbes en fonction de la distance  $S$  parcourue du point d'engrènement le long de la ligne d'action adimensionnée par rapport au pas de base apparent :

- La première courbe représente la raideur d'un couple de dents en contact désignée par  $\bar{K}_{eq(n)}$  (couple de dents de référence suivit).

- La deuxième courbe représente cette même raideur décalée vers la gauche d'un pas de base désignée par  $\bar{K}_{eq(n-1)}$  (couple de dents entrant en contact en avance d'un pas de base apparent : c'est à dire d'une période d'engrènement  $T_m$ ).
- La troisième courbe représente aussi cette même raideur mais cette fois elle est décalée vers la droite d'un pas de base désignée par  $\bar{K}_{eq(n+1)}$  (couple de dents entrant en contact en retard d'un pas de base apparent).

La raideur d'engrènement instantanée  $\bar{K}_{28/28}$  est la somme des différentes raideurs mentionnées.

On remarque que cette raideur est périodique de période égale à la période d'engrènement  $T_m$  (Maatar [12,30]) définie par :

$$T_m = \frac{Pb_a}{Rb_1 \Omega_1} \quad (4)$$

Avec  $Pb_a$  : pas de base apparent (mm)

$Rb_1$  : rayon du cercle de base du pignon (mm)

$\Omega_1$  : vitesse de rotation du pignon (rad/s)

De plus cette raideur est périodique sous forme d'un créneau, qui est dû au fait qu'on peut avoir :

- Soit deux couples de dents en prise ( $S \in [0 ; 0,638]$ ).
- Soit un couple de dents en prise ( $S \in ]0,638 ; 1]$ ).

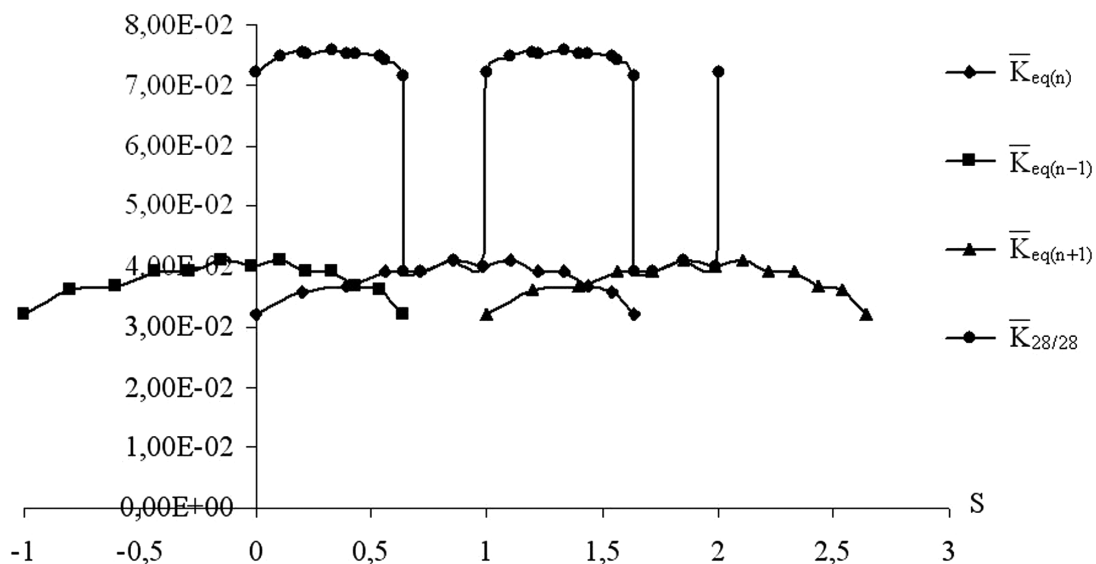


Fig. 7. Raideur d'engrènement d'un couple de dents ( $Z_1=28$ ,  $Z_2=28$ ).



#### 4. ETUDE DES CONTRAINTES AU PIED DE LA DENT

L'étude des contraintes de Von Mises au pied de la dent chargée joue un rôle important dans la tenue en service des roues dentées puisque l'amorçement des fissures voir même les cassures dans une dent chargée sont dans la plus part des cas localisées à son pied.

La figure 8 montre la répartition des contraintes dans une roue dentée suite à une charge concentrée à un nœud du profil actif. L'étude des contraintes est effectuée à l'aide du logiciel COSMOS/M pour une roue dentée maillée comme précédemment et encastrée au niveau de son rayon intérieur.

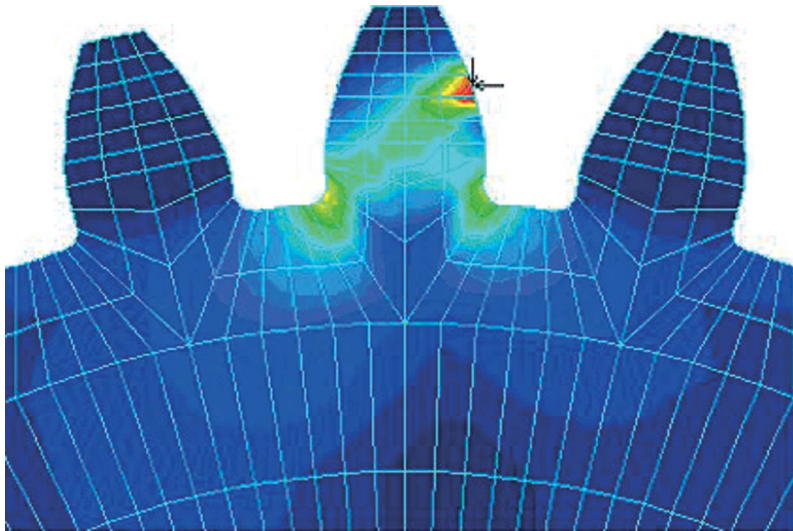


Fig. 8. Contraintes de Von Mises au niveau de la dent chargée.

On peut localiser trois zones de concentration de contraintes :

- Contrainte de Von Mises locale au niveau à la charge concentrée
- Contrainte de Von Mises « de traction » au pied de la dent (coté de la charge)
- Contrainte de Von Mises « de compression » au pied de la dent (coté opposé de la charge).

Il est à noter que les contraintes de Von Mises de traction ou de compression au pied de dent sont maximales quand la force est appliquée au niveau du rayon de tête ( $\bar{a}=1$ ) ce qui engendre un moment de flexion maximum. Une étude paramétrique de ces contraintes maximales en fonction du nombre de dents, du rayon de raccordement en pied de dent, du diamètre intérieur, de la hauteur de saillie et de la hauteur du creux a été effectuée. Dans chaque cas on modifie le paramètre d'étude concerné, toutes les autres caractéristiques géométriques sont les mêmes que celles présentées dans le tableau 1.

Sur la figure 9, on représente les courbes de contraintes maximales de traction et de compression en fonction du nombre de dents  $Z$ . On constate que les contraintes de traction ou de compression diminuent quand le nombre de dent augmente et tend vers une valeur finie. De plus on remarque que la contrainte maximale de compression au pied de la dent dépasse celle de traction quelque soit le nombre de dent choisi. Cependant malgré cette petite différence relative, c'est la contrainte de traction qui est la cause essentielle de l'amorçage des fissures au pied de dent (coté de la charge).



L'influence du rayon de raccordement  $R_c$  en pied de dent, de la hauteur de saillie  $h_a$ , de la hauteur du creux  $h_f$  et du diamètre intérieur  $\phi_{int}$  sur la valeur des contraintes maximales de Von Mises de traction et de compression en pied de dent est présentée dans le tableau 2. Les valeurs standards correspondent à celles obtenues avec les caractéristiques géométriques du tableau 1.

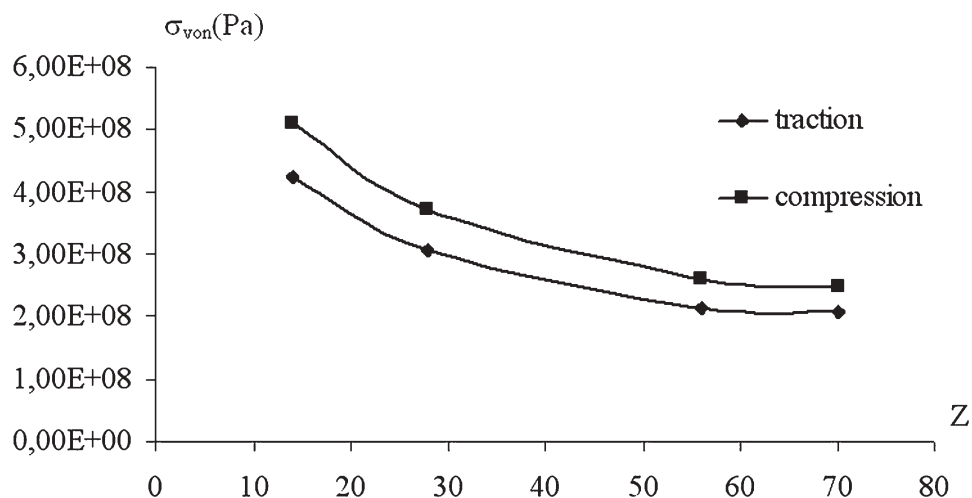


Fig. 9. Contrainte maximale de Von Mises de traction et de compression au pied de la dent pour différents nombres de dents.

Tableau 2. Contraintes maximales de Von Mises en fonction de  $R_c$ ,  $h_a$ ,  $h_f$  et  $\phi_{int}$ .

	Contraintes maximales de Von Mises en fonction de $R_c$ , $h_a$ , $h_f$ et $\phi_{int}$				
	Valeurs standards	$R_c=0,3M$	$h_a/M=1,25$	$h_f/M=1,25$	$\phi_{int} = 8 \text{ mm}$
$\sigma_{von}$ maxi de traction $\times 10^8 \text{ Pa}$	3,1	2,7	3,45	2,72	3,1
$\sigma_{von}$ maxi de compression $\times 10^8 \text{ Pa}$	3,7	3,4	4,11	3,34	3,7

Les résultats du tableau 2 montrent que les contraintes maximales de Von Mises augmentent avec l'augmentation des hauteurs  $h_a$  et  $h_f$  (hauteur de denture plus importante), diminuent avec l'augmentation du rayon  $R_c$  (meilleure répartition des contraintes) et restent constantes avec la variation du rayon intérieur  $\phi_{int}$ .

Les contraintes de Von Mises sont calculées pour une charge constante égale à 1615 N appliquée sur un nœud du profil actif. En première approximation, on peut supposer pendant l'engrènement que le couple de dents en prise considéré subit la moitié de la force  $F$  quand il est accompagné dans l'engrènement d'un autre couple de dents, sinon il supportera la totalité de la force  $F$ . Si on considère cette approche pour la répartition de la charge, on peut étudier les contraintes au pied de dent pour un couple de dents depuis son entrée en engrènement jusqu'à sa sortie (figure 5).

Sur les figures 10 et 11 on représente simultanément les contraintes de Von Mises de « traction » et de « compression » au pied de la dent étudiée dans le cas de deux couples de roues dentées ( $Z_1=28$ ,  $Z_2=28$ ) et ( $Z_1=28$ ,  $Z_2=56$ ). On peut remarquer que les contraintes de Von Mises de traction ou de compression au pied de la dent sont maximales quand le couple de dents considéré supporte la totalité de la charge. C'est cette phase d'engrènement qui est la plus dangereuse vis à vis de la tenue en service des engrenages.

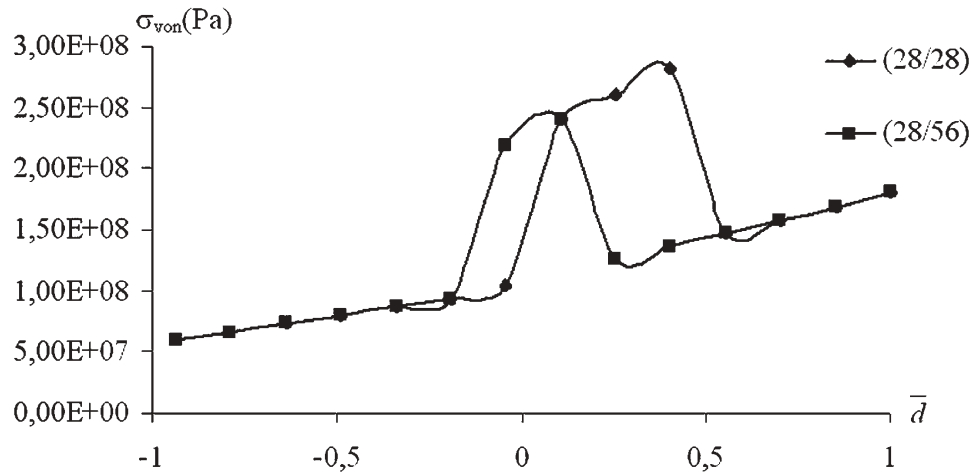


Fig. 10. Contraintes de Von Mises de traction au pied de la dent au cours de l'engrènement pour deux couples de roues ( $Z_1=28$ ,  $Z_2=28$ ) et ( $Z_1=28$ ,  $Z_2=56$ ).

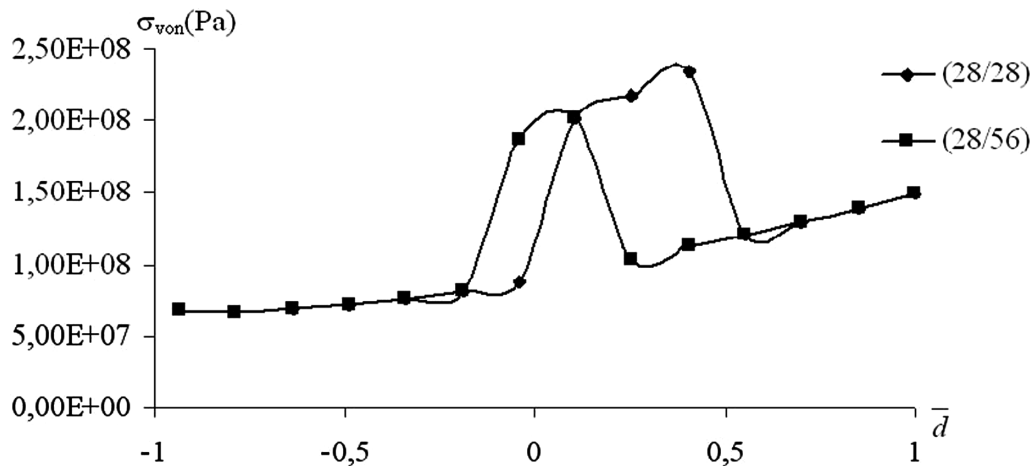


Fig. 11. Contraintes de Von Mises de compression au pied de la dent au cours de l'engrènement pour deux couples de roues ( $Z_1=28$ ,  $Z_2=28$ ) et ( $Z_1=28$ ,  $Z_2=56$ ).

## 5. CONCLUSION

Dans ce travail nous avons déterminé la raideur d'engrènement instantanée d'un engrenage droit moyennant une analyse bidimensionnelle par éléments finis. A partir de la connaissance du champs de déplacement, on calcule la raideur d'une dent, d'un couple de dents en prise et la

raideur d'engrènement en tenant compte du nombre de couple de dents en prise au cours de l'engrènement (généralement un ou deux) et des conditions géométriques de contact des deux roues dentées. Les résultats montrent que la raideur d'engrènement est périodique sous forme de créneau de période égale à la période d'engrènement. L'étude du champ de contraintes de la roue montre que les contraintes de Von Mises au pied de la dent diminuent avec l'augmentation du nombre de dents ou du rayon de raccordement, augmentent avec l'augmentation des hauteurs de saillie et de creux et restent constantes avec la variation du rayon d'encastrement arbre-roue. Il est à noter que ces contraintes de Von Mises sont maximales quand le couple de dents considéré supporte la totalité de la charge. C'est cette phase d'engrènement qui est la plus dangereuse vis à vis à la tenue en service des engrenages.

## REFERENCES

1. Maatar, M., Bettaieb, M.N. and Karra, C., "Estimation of time dependent mesh stiffness of spur gear using finite element method," *International Journal of Engineering Simulation*, Vol. 7, No. 2, pp. 3–10, 2006.
2. Kassai, A., Mathieu, J.P. and Chahmirian, G., "Sirènement de denture : Composantes non harmoniques de l'engrènement liées à la rectification par génération," *Proceedings of the 3rd World Congress on Gearing and Power Transmissions*, Paris, France, Vol. 2, pp. 853–864, 1992.
3. Kohler, H.K., Pratt, A. and Thompson, A.M., "Dynamics and noise of parallel-axis gearing," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, London, UK, Vol. 184, Pt30, pp. 111–121, 1969-70.
4. Remmers, E.P., "Gear mesh excitation spectra for arbitrary tooth spacing errors, load and design contact ratio," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 100, No. 10, pp. 715–722, 1978.
5. Umezawa, K., "The performance diagrams for the vibration of helical gears," *Proceedings of the 5th ASME International Power Transmission and Gearing Conference*, Chicago, IL, USA, Vol. 1, pp. 399–408, 1989.
6. Welbourn, D.B., "Gear errors and their resultant noise spectra," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, London, UK, Vol. 184, Pt30, pp. 131–139, 1969–70.
7. Vexel, P. and Maatar, M., "A mathematical model for analysing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 5, No. 191, pp. 629-660, 1996.
8. Rigaud, E., Sabot, J. and Perret-Liaudet, J., "Approche globale pour l'analyse de la réponse vibratoire d'une transmission par engrenages," *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 9, pp. 315–330, 2000.
9. Lin, J. and Parker, R.G., "Mesh Stiffness Variation Instabilities in Two-Stage Gear Systems," *Journal of Vibration and Acoustic, Trans. A.S.M.E*, Vol. 124, pp. 68–76, January 2002.
10. Furukawa, T., "Vibration analysis of gear and shaft system by modal method," *Proc. 3<sup>rd</sup> J.S.M.E, Int. Conf. on motions and power transmission*, Hiroshima, pp. 123–127, 1991.
11. Kasuba, R. and Evans, J.W., "An extended model for determining dynamic loads in spur gearing," *Journal of Mech. Design*, Vol. 103, pp. 398–409, 1981.
12. Maatar, M., "Contribution à l'analyse du comportement dynamique des réducteurs à engrenages simple étage. Influence des écarts de forme et des défauts de montage," *Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, pp. 192, 1995.
13. Rieger, N.F., *Drive train vibration. Machine Design*, Vol. 4, pp. 115–119, 1969.
14. Vexel, P., "Contribution à l'analyse du comportement dynamique des réducteurs à engrenages à axes parallèles," *Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, p. 188, 1988.

15. Henriot G., *Traité théorique et pratique des engrenages 1*, 6<sup>e</sup> édition, Paris, Dunod, Tome I, pp. 662, 1979.
16. Cornell, R.W., "Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth," *Journal of Mech. Design*, Vol. 103, pp. 447–459, 1981.
17. Furrow, R.W. and Mabie, H.H., "The measurement of static deflection in spur gear teeth," *Journal of Mechanisms*, Vol. 5, pp. 147–168, August 1969.
18. Tobe, T. and Inoue, K., "Longitudinal load distribution factors of spur gear teeth," *Congrès Mondial des Engrenages*, Paris, Vol. 1, pp. 211–225, 1977.
19. Tavakoli, M.S. and Houser, D.R., "Optimum Profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gears," *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, *Trans. A.S.M.E.*, Vol. 108, pp. 86–94, March 1986.
20. Chabert, G., Dang Tran, T. and Mathis, R., "An evaluation of stresses and deflection of spur gear teeth under strain," *Journal Eng. Ind.*, Vol. 96, No. 1, pp. 85–93, 1974.
21. Hidaka, T., Terauchi, Y., Nohara, M. and Oshita, J., *Dynamic behaviour of planetary gear (3rd report: displacement of ring gear in direction of line of action)* *Bulletin of the J.S.M.E.*, Vol. 20, No. 150, pp. 1663–1672, 1977.
22. Wang, K.L. and Cheng, H.S., "A numerical solution to the dynamic load, film thickness and surface temperatures in spur gears," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 103, No. 1, 1981, p. 177–187.
23. Sainsot, P., "Analyse du contact entre dentures d'engrenages cylindriques de réducteurs," *Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, p. 205, 1989
24. Mathis, R., "Contraintes et déformations dans un engrenage hélicoïdal," *Congrès Mondial des Engrenages*, Paris, Vol. 1, pp. 109–130, 1977.
25. Tobe, T., Kato, M. and Inoue, K., "Bending of stub cantilever plate and some applications to strength of gear teeth," *Journal of Mech. Design*, Vol. 100, pp. 374–381, 1978.
26. Tobe, T. and Inoue, K., "Longitudinal load distribution factor of helical gears," *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 107, 1985, pp. 17–23.
27. Arafa, M. and Megahed, M., "Evaluation of spur gear mesh compliance using the finite element method, Proc of the I MECH E Part C," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 213, No. 6, pp. 569–579, 1999.
28. Choi, M. and David, J.W., *Mesh stiffness and transmission error of spur and helical gear*, SAE, paper 901764, 1990.
29. Chakraborti, J. and Humashikatti, H.G., *Determination of the combined mesh stiffness of spur gear pair under load*, ASME, paper 74-DET-39, 1974.
30. Maatar, M., Velez, P., Nguyen, T., Octrue, M. and Vasseur, J.L., "Experimental and Numerical analysis of transmission errors in spur gear drives," *Journal Machine Vibration*, Vol. 4, pp. 8–13, 1995.

## NOMENCLATURE

$E$ : (N/mm <sup>2</sup> )	Module de Young
$F$ : (N)	Charge mécanique (action de contact)
$L$ : (en mm)	Largeur de denture
$M$ : (en mm)	Module
$halM$ : (sans unité)	Coefficient de saillie
$hflM$ : (sans unité)	Coefficient de creux
$Rc$ : (en mm)	Rayon de raccordement au pied de dent
$r_m$ :	Rayon où la force $F$ est appliquée
$r_o$ :	Rayon primitif de taillage

$Pb_a$ : (mm)	Pas de base apparent
$Rb_1$ : (mm)	Rayon du cercle de base du pignon
$Z$ : (sans unité)	Nombre de dents ( $Z_1$ : pignon, $Z_2$ : roue),
$\delta_{eq}$ : (mm)	Déplacement total au nœud chargé
$\overline{K}_{eq} = \frac{F/L}{\delta_{eq}E}$	Raideur équivalente par unité de longueur de la dent
$\alpha$ : (en degrés)	Angle de pression
$\phi_{int}$ : (en mm)	Diamètre intérieur (liaison arbre-roue dentée)
$\Omega_1$ : (rad/s)	Vitesse de rotation du pignon
$T_m = \frac{Pb_a}{Rb_1\Omega_1}$ (s)	Période d'engrènement
$\sigma_{von}$ : (Pa)	Contraintes de Von Mises