

# MANIPULATEUR SÉRIEL 6R SPHÉRIQUE ISOTROPE POUR TOUTE ORIENTATION DE L'EFFECTEUR

Khaled Akrouf, Luc Baron, Xiaoyu Wang

*Département de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Canada*

*E-mail: khaled.akrouf@polymtl.ca; luc.baron@polymtl.ca*

Received October 2009, Accepted November 2009  
No. 09-CSME-51, E.I.C. Accession 3137

---

## RÉSUMÉ

Un manipulateur est dit isotrope si le produit de sa matrice jacobienne par sa transposée est un multiple de la matrice identité. Dans cet état, le manipulateur démontre des propriétés cinématiques optimales. Dans cet article, nous montrons qu'il existe un manipulateur sériel 6R sphérique dont l'effecteur peut atteindre toutes orientations en état constant d'isotropie. Les articulations 2 et 5 sont fixes, alors que les 4 autres permettent d'atteindre toutes les orientations. À notre connaissance, ce manipulateur est le seul manipulateur sériel sphérique dans la littérature à conserver une configuration isotrope sur tout son espace de travail.

**Mots-clés :** isotropie; manipulateur sphérique; redondance; cinématique.

---

## ISOTROPIC SPHERICAL 6R SERIAL MANIPULATOR FOR ANY ORIENTATION OF ITS END-EFFECTOR

### ABSTRACT

A manipulator is said isotropic if the product of the jacobian matrix by its transpose is equal to a multiple of the identity matrix. In this state, the manipulator exhibits its best kinematic properties. In this paper, we show that there exist a serial 6R spherical manipulator for which the end-effector can reach any orientation while constantly being at isotropy. Joints 2 and 5 are kept fix, while the 4 others joints allow to reach any orientation. To our knowledge of the litterature, this manipulator is the only serial spherical one which maintain isotropy throughout its entire workspace.

**Keywords:** isotropy; spherical manipulator; redundancy; kinematics.

## 1. INTRODUCTION

Le concept d'isotropie a été utilisé dans plusieurs domaines pour décrire des propriétés égales dans toutes les directions. Dans le domaine de la cinématique des manipulateurs robotiques, ce concept peut être appliqué à la transmission des vitesses articulaires en vitesses de l'effecteur. Ainsi, lorsque la matrice jacobienne d'un manipulateur est isotrope, les articulations motorisées ont, à cette configuration, la capacité de produire des vitesses égales dans toutes les directions.

Dans [1], le concept d'isotropie a été utilisé pour concevoir des manipulateurs sériels redondants pour lesquelles certaines règles peuvent être énoncées. L'isotropie d'un manipulateur sériel  $nR$  n'est pas affectée par la position de la première et de la dernière articulations, soient 1 et  $n$ . Si l'effecteur a une ou plusieurs articulations rotoides et une ou plusieurs articulations prismatiques, alors il est nécessaire de rendre la matrice jacobienne adimensionnelle en utilisant une longueur caractéristique. Dans le cas de manipulateurs à mobilité sphérique, la matrice jacobienne a déjà des dimensions homogènes. En général, un manipulateur qui peut atteindre l'isotropie en au moins une configuration est qualifié d'isotrope.

Nous avons donné en [2] des exemples d'ensembles de vecteurs unitaires isotropes pour  $n = 3$ ,  $n = 4$  et  $n = 5$ . De plus, nous avons donné en [3] une méthode de construction permettant d'obtenir des ensembles isotropes de vecteurs pour  $2 < n < 40$ .

Dans [4], il est démontré qu'il existe 8 manipulateurs sériels 4R sphériques pouvant atteindre l'isotropie à une configuration de leur espace de travail. Une courbe continue, ou une surface connexe, sont dites isotropes pour un manipulateur donné si lorsque l'effecteur de ce manipulateur peut parcourir cette courbe, ou cette surface, tout en conservant en tout point une configuration isotrope. Les travaux sur les parcours isotropes continus sont peu nombreux. La plupart traitent de manipulateurs ayant un nombre fini de configurations isotropes fixes.

Dans [3], nous avons démontré l'existence de telles courbes et surfaces isotropes pour lesquelles il existe un manipulateur 6R sphérique capable de les parcourir tout en gardant constamment une configuration isotrope.

Dans le présent article, nous démontrons qu'il existe un manipulateur sériel 6R sphérique dont l'effecteur peut atteindre n'importe quelle orientation tout en conservant une configuration isotrope. Contrairement au manipulateur sphérique de cet article, le manipulateur sphérique présenté dans [3] ne peut garder de manière continue une configuration isotrope que sur une demi-sphère.

À notre connaissance, le manipulateur présenté dans cet article est le seul manipulateur sériel sphérique dans la littérature à conserver une configuration isotrope sur tout son espace de travail.

## 2. DÉFINITIONS

La relation cinématique entre le vecteur vitesse angulaire de l'effecteur, appelé  $\omega$ , et le vecteur vitesse des articulations, appelé  $\dot{\theta}$ , d'un manipulateur sphérique ayant  $n$  articulations rotoides en série est donné par [5] :

$$\omega = \mathbf{J}\dot{\theta}, \quad \dot{\theta} \equiv [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \cdots \ \dot{\theta}_n]^T, \quad \mathbf{J} \equiv [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_n] \quad (1)$$

où  $\mathbf{e}_i$  est un vecteur unitaire indiquant, pour la  $i^{\text{ème}}$  articulation, l'orientation de l'axe ainsi que la direction de rotation autour de celui-ci. Puisque les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont de dimension  $3 \times 1$ , alors  $\mathbf{J}$  est de dimension  $3 \times n$ ,  $\omega$  est de dimension  $3 \times 1$  et  $\dot{\theta}$  est de dimension  $n \times 1$ . De plus,  $\mathbf{J}$  est la

matrice jacobienne associée au manipulateur, et elle décrit plusieurs de ses propriétés cinématiques.

Un manipulateur décrit par l'éq. (1) est dit isotrope si

$$\mathbf{J}\mathbf{J}^T = \lambda \mathbf{1}, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{1} \text{ matrice identité de } \mathbf{R}^3 \quad (2)$$

Puisque  $\mathbf{J}$  dépend de la position articulaire  $\theta$ , il suffit de trouver au moins une position articulaire  $\theta_I$  telle que l'éq. (2) est satisfaite pour pouvoir qualifier le manipulateur d'isotrope. Il a été démontré en [4] que cette position isotrope est toujours indépendante de  $\theta_1$  et  $\theta_n$ . C'est-à-dire que l'isotropie est conservée.

Les propriétés suivantes ont été démontrées en [2] et [4] :

Propriété 1 : Soit  $\mathbf{J} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_n]$  et  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T = \lambda \mathbf{1}$ , alors  $\lambda = \frac{n}{3}$ .

Propriété 2 : L'isotropie d'un ensemble de vecteurs unitaires  $\{\mathbf{e}_i\}_1^n$  est conservée par toute isométrie.

Propriété 3 : L'isotropie d'un ensemble de vecteurs unitaires  $\{\mathbf{e}_i\}_1^n$  est conservée par toute rotation autour de  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_n$ .

En vertu de la propriété 3, toute position articulaire isotrope  $\theta_I$  (telle que l'éq. (2) est satisfaite) est toujours indépendante de  $\theta_1$  et  $\theta_n$ , c'est-à-dire que  $\theta_I = [\theta_2 \ \dots \ \theta_{n-1}]^T$ .

### 3. FORMULATION DU PROBLÈME

Un manipulateur sphérique centré en  $O$  a tous ses axes de rotation  $\mathbf{e}_i$  qui se coupent en  $O$ . Sur la sphère de rayon unitaire ( $R = 1$ ) la membrure qui relie deux articulations successives peut donc être circulaire et de longueur  $L = R\alpha = \alpha$  où  $\alpha$  est l'angle entre les axes de rotation consécutifs, c'est-à-dire  $\alpha_i = \widehat{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1})}$ . Il s'en suit qu'un manipulateur sériel sphérique est géométriquement entièrement déterminé par la connaissance des angles  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ . Évidemment, tous ces angles doivent être constants, ce qui revient à dire que le produit scalaire entre les vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}_{i+1}$  des deux axes de rotation consécutifs doit rester constant pendant tout déplacement.

Les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  de la matrice jacobienne d'un manipulateur sphérique ont tous leurs points associés qui appartiennent à la sphère unitaire  $S$ . Dans l'espace  $\mathbf{R}^3$  ayant  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  pour repère, pour tout point  $M$  de  $S$ , il existe  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $\phi \in [0, \pi]$  tels que les coordonnées de  $M$  sont:

$$\mathbf{OM} = [-\sin(\phi)\cos(\theta) \quad \sin(\phi)\sin(\theta) \quad -\cos(\phi)]^T \quad (3)$$

Pour un manipulateur sériel 6R sphérique, nous cherchons un ensemble de vecteurs  $\{\mathbf{e}_i\}_1^6$  tel que l'éq. (2) est satisfaite pour toutes orientations de l'effecteur. En vertu de la propriété 3, toutes les orientations de l'effecteur autour de  $\mathbf{e}_6$  sont automatiquement satisfaites. Ainsi, il suffit de positionner le point  $M$  associé au vecteur  $\mathbf{e}_6$  en tout point de la sphère unitaire  $S$  pour produire toutes les orientations possibles de l'effecteur.

Prenons  $\mathbf{e}_6 = \mathbf{OM}$  de manière à ce que la sixième articulation puisse se positionner en tout point de  $S$ , et choisissons ensuite  $\{\mathbf{e}_i\}_1^5$  de telle manière que tous les produits scalaires  $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_{i+1}$  soient constants  $\forall (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ . Ainsi, la matrice jacobienne suivante est obtenue

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi)\cos(\theta) & \sin(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) & -\cos(\phi)\sin(\theta) & -\cos(\theta) & -\cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 & -\sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{bmatrix}$$

On vérifie aisément que  $\forall(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ ,  $\forall i \in [1 \dots 5]$ , nous avons  $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_{i+1} = 0$ . Outre leurs produits scalaires successifs constants  $\forall(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ , les vecteurs  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^6$  ont été choisis de telle manière que  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T = \lambda\mathbf{1}$  avec  $\lambda = 2$ , c'est-à-dire pour que  $\mathbf{J}$  soit une matrice isotrope. Puisque  $n = 6$  on a donc d'après la propriété 1 ci-dessus,  $\lambda = \frac{6}{3} = 2$ .

Le manipulateur 6R sphérique isotrope associé à  $\mathbf{J}$  gardera donc une position isotrope sur tout parcours effectué sur  $S$ , et il gardera une géométrie invariable lors de ses déplacements sur  $S$ . Ce manipulateur est donc isotrope pour toutes les orientations de son effecteur.

Pour nous placer dans une optique plus habituelle de conception d'un manipulateur, nous cherchons à obtenir un manipulateur dont le premier vecteur de la matrice jacobienne qui lui est associée soit constant. Nous transformons donc  $\mathbf{J} = [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_6]$  en  $\mathbf{J}' = [\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_6]$  où  $\mathbf{e}'_1$  est constant. Sans perte de généralité et pour plus de commodité, nous fixons  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{k} = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

Soit le vecteur  $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{k}}{\|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{k}\|}$ , la rotation autour du vecteur  $\mathbf{e}$  et d'angle  $\phi$  qui amène le vecteur  $\mathbf{e}_1$  sur  $\mathbf{k}$ . La rotation d'un angle  $\phi$  autour de  $\mathbf{e}$  a pour matrice  $\mathbf{Q} = \mathbf{e}\mathbf{e}^T + \cos(\phi)(\mathbf{1} - \mathbf{e}\mathbf{e}^T) + \sin(\phi)\mathbf{E}$  où  $\mathbf{E}$  est la matrice produit vectoriel du vecteur  $\mathbf{e}$ . On a alors

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 - (1 - \cos(\phi))\cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta)(1 - \cos(\phi)) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta)(1 - \cos(\phi)) & 1 - (1 - \cos(\phi))\sin^2(\theta) & -\sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\sin(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (4)$$

d'où

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \cos(2\phi)\cos(\theta) & -\sin(2\phi)\cos(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & -\cos(2\phi)\sin(\theta) & \sin(2\phi)\sin(\theta) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\sin(2\phi) & -\cos(2\phi) \end{bmatrix} \quad (5)$$

En vertu de la propriété 2, l'isométrie  $\mathbf{Q}$  permet de conserver l'isotropie de  $\mathbf{J}$  vers  $\mathbf{J}_1$ . De la matrice  $\mathbf{J}_1$ , nous déduisons la matrice  $\mathbf{J}'$  par un simple changement de variable, c'est-à-dire :

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & -\cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Nous avons bien  $\mathbf{J}'\mathbf{J}'^T = \lambda\mathbf{1}$  avec  $\lambda = 2$  puisque, d'après la propriété 2, les isométries conservent l'isotropie. Les rotations conservent les angles donc le manipulateur associé à la matrice jacobienne  $\mathbf{J}'$  est simplement le manipulateur associé à la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  vu sous un autre angle.

Tableau 1. Orientation des axes  $\mathbf{x}_i$ .

$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$
$-\cos(\theta)$	0	0	$\sin(\phi)\cos(\theta)$	$-\sin(\theta)$
$\sin(\theta)$	0	0	$-\sin(\phi)\sin(\theta)$	$-\cos(\theta)$
0	-1	-1	$\cos(\phi)$	0

#### 4. PARAMÈTRES DE DENAVIT-HARTENBERG DU MANIPULATEUR ISOTROPE

Les paramètres de Denavit-Hartenberg associés au manipulateur isotrope sont obtenus comme suit : toutes les directions  $\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^6$  des vecteurs  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^6$  se coupent au centre  $O$  de la sphère unitaire. Donc les axes  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^6$  sont tels que  $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_{i-1} \times \mathbf{e}_i$ . Les angles  $\alpha_i = (\widehat{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i+1}})$  sont mesurés par rapport à l'orientation positive de  $\mathbf{x}_{i+1}$ . Les angles  $\theta_i = (\widehat{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}})$  sont mesurés par rapport à l'orientation positive de  $\mathbf{z}_i$ .

Selon la méthode de Denavit-Hartenberg, l'orientation des axes  $\mathbf{x}_i$  est choisie tel que montré au Tableau 1. Puisque  $\alpha_i = (\widehat{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i+1}})$ , on a  $\cos(\alpha_i) = \mathbf{e}'_i{}^T \mathbf{e}'_{i+1}$ . Ainsi les angles entre les axes  $\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^6$  des articulations successives, mesurés par rapport à l'orientation positive de  $\mathbf{x}_{i+1}$ , sont entièrement déterminés par la connaissance des vecteurs colonnes de la matrice jacobienne. Les coordonnées des vecteurs  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=2}^6$ , du tableau 1, nous donnent  $\|\mathbf{x}_2\| = \|\mathbf{x}_3\| = \|\mathbf{x}_4\| = \|\mathbf{x}_5\| = \|\mathbf{x}_6\| = 1$ . De plus, tous les produits scalaires de deux axes  $\mathbf{e}_i$  consécutifs sont nuls, c'est-à-dire :  $\mathbf{e}'_i{}^T \mathbf{e}'_{i+1} = 0 \forall i \in [1 \dots 5]$ , on a alors  $\alpha_i = \frac{\pi}{2} \forall i \in [1 \dots 5]$ . Les  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{e}_i$ , nous permettent d'avoir les valeurs des angles  $\theta_i$  montrées au Tableau 2. Apparemment, les valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_6$  n'influent pas sur l'isotropie du manipulateur, tel que le montre la propriété 3.

La matrice jacobienne  $\mathbf{J}'$  de dimension  $3 \times 6$  est composée de 2 matrices  $\mathbf{J}'_1$  et  $\mathbf{J}'_2$  de dimension  $3 \times 3$

$$\mathbf{J}'_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{J}'_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Les rotations conservent l'isotropie, par conséquent toute rotation appliquée  $\mathbf{J}'_2$  qui conserve inchangé l'angle  $\alpha_3 = (\widehat{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4})$  gardera la matrice  $\mathbf{J}'_2$  isotrope et par conséquent gardera aussi  $\mathbf{J}'$  isotrope. Or, toute rotation autour de l'axe  $\mathbf{x}_3$  de la troisième articulation garde  $\alpha_3$  constant, donc quelque soit la valeur de  $\theta_3$  la matrice jacobienne  $\mathbf{J}'$  est isotrope. Les valeurs de  $\{a_i\}_{i=1}^5$  sont toutes nulles puisque tous les axes  $\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^6$  se coupent en  $O$ , donc  $a_i = \text{distance}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i+1}) = 0 \forall i \in [1 \dots 5]$ . On a aussi  $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}'_{i-1} \times \mathbf{e}'_i$ , les axes  $\mathbf{x}_i$  se coupent aussi tous en  $O$ . La figure 1 montre le nouveau manipulateur sériel sphérique isotrope résultant des Tableaux 1, 2 et 3. Les

Tableau 2. Paramètres de Denavit-Hartenberg du manipulateur associé à  $\mathbf{J}'$ .

$i$	1	2	3	4	5	6
$\alpha_i$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	*
$\theta_i$	$\theta_1$	$\pm 90^\circ$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\pm 90^\circ$	$\theta_6$

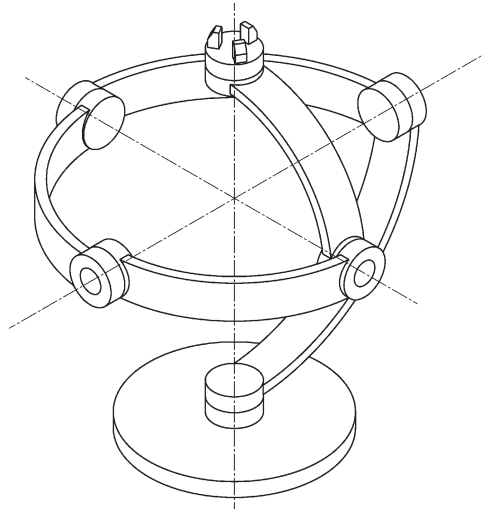


Fig. 1. Manipulateur sériel 6R sphérique isotrope pour  $\theta_2 = \theta_5 = \pi/2$ .

Tableau 3. Paramètres de Denavit-Hartenberg du manipulateur associé à  $\mathbf{J}'$ .

$i$	1	2	3	4	5
$a_i$	0	0	0	0	0
$b_i$	0	0	0	0	0

valeurs de tous les angles  $\{\alpha_i\}_1^5$  sont constantes et le manipulateur 6R sphérique qui en découle peut décrire toute la sphère comme surface isotrope tant qu'il ne se produira pas de collision entre ses articulations. Sa matrice jacobienne reste donc isotrope en chacun des points de cette sphère, quelque soit le parcours choisi sur celle-ci.

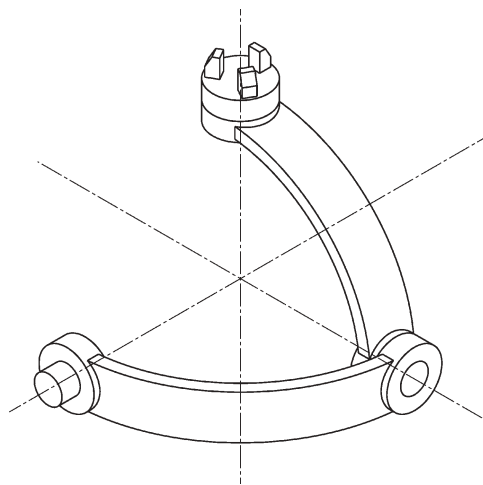


Fig. 2. Les trois dernières membrures du manipulateur isotrope pour  $\theta_5 = \pi/2$ .

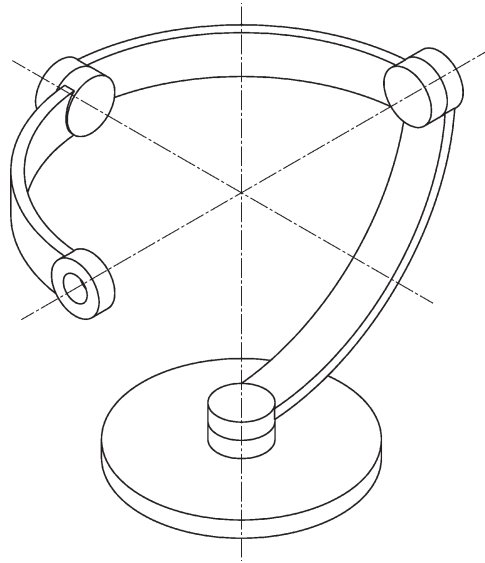


Fig. 3. Les trois premières membrures du manipulateur isotrope pour  $\theta_2 = \pi/2$ .

Il faut noter dans le Tableau 2 que les angles  $\theta_2$  et  $\theta_5$  doivent être maintenus constants à  $\pm 90$  deg, les autres angles pouvant prendre n'importe quelle valeur. Les figures 2 et 3 montrent les trois dernières et les trois premières membrures du manipulateur avec  $\theta_2 = \theta_5 = \pi/2$ . Il est apparent sur la figure 2 que les vecteurs  $\mathbf{e}_4$ ,  $\mathbf{e}_5$  et  $\mathbf{e}_6$  forment toujours un ensemble orthogonal quelque soient  $\theta_4$  et  $\theta_6$ . De même, il est aussi apparent sur la figure 3 que les vecteurs  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  forment toujours un ensemble orthogonal quelque soient  $\theta_1$  et  $\theta_3$ . Noter que les deux ensembles orthogonaux  $\{\mathbf{e}_i\}_1^3$  et  $\{\mathbf{e}_i\}_4^6$  peuvent subir toute isométrie relative tout en maintenant l'isotropie de  $\mathbf{J}'$ , c'est pourquoi  $\theta_4$  peut prendre n'importe quelle valeur sans changer l'isotropie de  $\mathbf{J}'$ . De même, la membrure 3 d'un angle  $\alpha_3$  (la dernière montrée à la fig. 3) peut aussi prendre n'importe quelle longueur sans changer l'isotropie de  $\mathbf{J}'$ . Sans perte de généralité, nous avons arbitrairement choisi  $\alpha_3 = \pi/2$ .

Il est intéressant de noter que bien que l'on ait un manipulateur 6R, seulement 4 articulations sont effectivement utilisées pour produire toutes les orientations de l'effecteur. Les articulations  $\theta_2$  et  $\theta_5$  ne tournent jamais, et donc, il n'est pas nécessaire d'y installer de moteur. Cependant, la présence de leurs axes de rotation est nécessaire à l'isotropie de  $\mathbf{J}'$ . Les axes  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_5$  permettent de compléter les capacités de mobilité des autres axes, et ainsi, d'obtenir une capacité de mobilité égale dans toutes les directions, soit l'isotropie de  $\mathbf{J}'$  et de son manipulateur associé.

Les articulations 2 et 5 sont appelées *articulations virtuelles*, puisqu'elles doivent être présentes, sans jamais tourner. Ainsi, le manipulateur sériel 6R sphérique isotrope peut être réalisé avec un manipulateur sériel 4R sphérique auquel deux articulations virtuelles sont ajoutées. La matrice jacobienne associée au 6R (le 4R avec 2 articulations virtuelles) sera toujours isotrope, alors que celle du 4R ne sera pas nécessairement isotrope sans les 2 articulations virtuelles. Nous avons montré que quelque soit la valeur de  $\theta_3$  le manipulateur associé à  $\mathbf{J}'$  garde une configuration isotrope, ainsi en fixant  $\theta_3$  le manipulateur 6R sphérique isotrope peut aussi être réalisé avec un manipulateur sériel 3R sphérique auquel trois articulations virtuelles sont ajoutées.

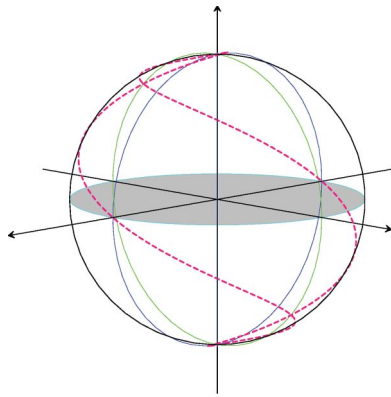


Fig. 4. Parcours de  $\mathbf{e}_6$ .

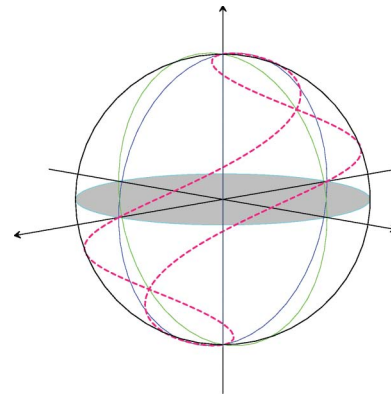


Fig. 5. Parcours de  $\mathbf{e}_5$ .

## 5. EXEMPLE DE TRAJECTOIRE ISOTROPE CONTINUE

Soit la courbe  $\mathfrak{S}$  définie par :

$$\mathfrak{S} = \left\{ M \in S, \mathbf{OM} = [-\sin(\phi)\cos(2\phi) \quad \sin(\phi)\sin(2\phi) \quad -\cos(\phi)]^T \forall \phi \in ]0, \pi[ \right\} \quad (7)$$

La figure 4 illustre (en pointillé rouge) la courbe parcourue par la dernière articulation  $\mathbf{e}_6$  du manipulateur, soit la courbe  $\mathfrak{S}$  requise. Les figures 4 à 7 illustrent (en pointillé rouge) les courbes parcourues par les articulations  $\mathbf{e}_5$  à  $\mathbf{e}_2$ , respectivement. L'articulation  $\mathbf{e}_1$  étant fixe, elle n'est donc pas illustrée. En tous points de cette courbe, le manipulateur 6R a une matrice jacobienne  $\mathbf{J}'$  isotrope.

## 6. ESPACE DE TRAVAIL

Les coordonnées du vecteur  $\mathbf{e}_6$  qui porte l'axe de la dernière articulation sont

$$\mathbf{e}_6 = [-\sin(\phi)\cos(\theta) \quad \sin(\phi)\sin(\theta) \quad -\cos(\phi)]^T \quad (8)$$

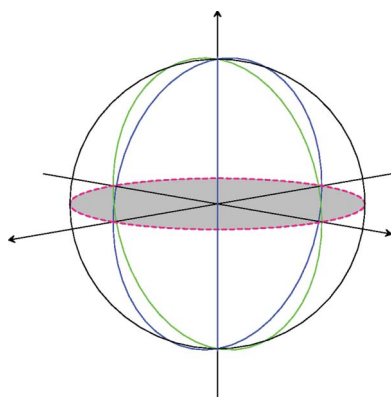


Fig. 6. Parcours de  $\mathbf{e}_4$ .

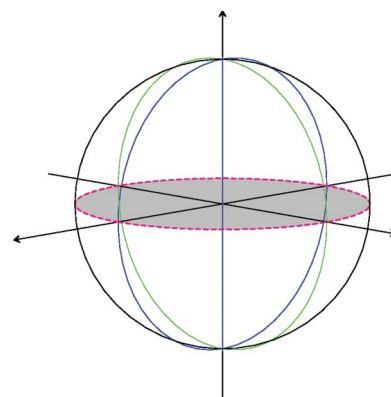


Fig. 7. Parcours de  $\mathbf{e}_3$ .



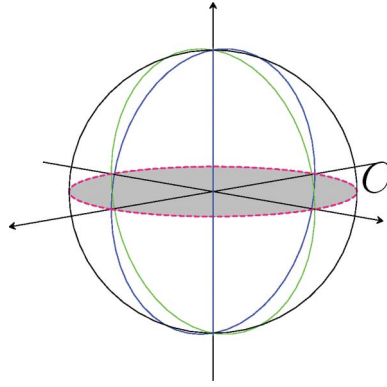


Fig. 8. Parcours de  $\mathbf{e}_2$ .

Soit  $M(x, y, z)$ , un point quelconque de  $S$ , on a alors  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Pour savoir si la dernière articulation du manipulateur associé à  $\mathbf{J}'$  peut atteindre tout point de  $S$ , il suffit de montrer qu'il existe  $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  tel que

$$-\sin(\phi)\cos(\theta) = x, \quad \sin(\phi)\sin(\theta) = y, \quad -\cos(\phi) = z \quad (9)$$

Nous avons alors  $M \in S \Rightarrow z \in [-1, 1] \Rightarrow \cos(\phi) = -z$  admet pour solutions  $\phi_0 = \arccos(-z)$ . On a la résolution du système suivant pour  $\phi_0 \neq 0$

$$\cos(\theta) = -\frac{x}{\sin(\phi_0)}, \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\sin(\phi_0)} \quad (10)$$

qui admet une solution  $\theta$  puisque nous avons bien  $x^2 + y^2 = \sin^2(\phi)$ . Si  $\phi_0 = 0$  alors on a  $M = (0, 0, -1)$ , c'est-à-dire, la position du pôle sud de la sphère.

Par conséquent, si  $\phi \neq 0 \exists \theta_0 \in [0, 2\pi]$  tel que (10) soit vérifié, donc  $\exists(\theta_0, \phi_0) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  tel que (9) soit vérifié, ainsi la dernière articulation du manipulateur associé à  $\mathbf{J}'$  peut atteindre tout point de  $S$  à la condition qu'il n'y ait pas de collision entre les articulations lors des déplacements.

## 7. CONCLUSIONS

Il existe un manipulateur sériel 6R sphérique dont la matrice jacobienne  $\mathbf{J}'$  est isotrope pour toutes orientations de son effecteur si certaines conditions géométriques sont respectées. Ainsi, pour une sphère de rayon unitaire, les membrures doivent être de longueur  $\pi/2$ , ( $l_i = R \alpha_i$  avec  $R=1$ ), sauf pour  $l_3$  car  $\alpha_3$  qui peut prendre n'importe quelle valeur. De même, les articulations  $\theta_2$  et  $\theta_5$  doivent être maintenues à  $\pi/2$  pour toutes orientations de l'effecteur. Ainsi, les articulations  $\theta_1, \theta_3, \theta_4$  et  $\theta_6$  permettent de parcourir toutes les orientations de l'effecteur en maintenant toujours l'état d'isotropie. À notre connaissance, ce manipulateur sériel 6R sphérique est le seul manipulateur sériel sphérique dans la littérature à conserver une configuration isotrope sur tout son espace de travail qui est l'espace de travail maximal pour un manipulateur sphérique.

## REMERCIEMENTS

Le support financier du Conseil de Recherche en Science Naturelle et en Génie du Canada (CRSNG) par la subvention RGPIN-203618 est gracieusement remercié.

## RÉFÉRENCES

1. Angeles, J., “The Design of Isotropic Manipulator Architectures in the Presence of Redundancies,” *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 11, No. 3, pp. 197–201, juin 1992.
2. Akrouf, K., Baron, L. et Wang, X., “Existence d’une infinité non dénombrable de positions isotropes pour les manipulateurs 5R sphériques,” *2008 IFToMM World Congress*, Besançon, France, juin 2008.
3. Akrouf, K. et Baron, J., “Existence d’un manipulateur 6R sphérique pour lequel la demi-sphère ouverte est une surface isotrope continue,” *2009 CCToMM MMM Symposium*, St-Hubert, Canada, mai 2007.
4. Chablat, D. et Angeles, J., “The Computation of all 4R Serial Spherical Wrists With an Isotropic Architecture,” *Journal of Mechanical Design*, Transactions of the ASME, Vol. 125, No. 2, pp. 275–280, juin 2003.
5. Angeles, J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, methods, and algorithms*, Second Edition, Springer-Verlag, 2003.